Shahid Beheshti University

Faculty of Mathematical Sciences

Department of Computer Science

M. Sc. Thesis

A Comparison Between Laguerre, Hermit, and Sinc Orthogonal Functions

by

Fattaneh Bayat Babolghani

Supervisor

Dr. Kourosh Parand

Advisor

Dr. Ziba Eslami

Summer 2012

Surname: Bayat Babolghani Name: Fattaneh

Title: A Comparison Between Laguerre, Hermit, and Sinc Orthogonal Functions

Supervisor: Dr. Kourosh Parand Advisor: Dr. Ziba Eslami

Degree: Master of Science Subject: Department of Computer Science
Field: Scientific Computation

Shahid Beheshti University Faculty of Mathematical Sciences
Date: Summer 2012 Number of pages: 88

Keywords: Laguerre polynomials, Laguerre functions, Hermit polynomials, Hermit functions, Sinc functions, Differential equations, Spectral methods.

Abstract

Computer Sciences are a connection between knowledge of Computer and Mathematics. Scientific Computations is a branch of Computer Sciences, and it's goal is finding the best solution of problems in many of sciences. A number of problems in Physics, Chemistry, Mathematics, and etc can be modeled by Differential Equations. Some kinds of Differential Equations are Partially and Ordinarily, Linearly and Nonlinearly. In this thesis, at the first glance, we introduced Spectral methods. In addition, we presented Laguerre Orthogonal polynomials, Laguerre Orthogonal functions, Hermit Orthogonal polynomials, Hermit Orthogonal functions, and Sinc Orthogonal functions that are defined in semi-infinite and infinite domains. Then we used the Collocation method as a Spectral method for solving some Differential Equations in semi-finite domain; also, we compared the performances of Laguerre, Hermit, and Sinc Orthogonal functions in solving these types of equations.
Some papers from this thesis are submitted and published in some international journals.

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

مقایسه‌ی میان توابع متعامد لاگر، هرمیت و سینک

نگارش

فتانه بیات بابلقانی

استاد راهنما

جناب آقای دکتر کورش پرند

استاد مشاور

سرکار خانم دکتر زیبا اسلامی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به:

همه ی عزیزانم؛

که همواره وجودشان مایه ی دلگرمی من بوده است.

سپاس گزاری...

پس از حمد و ثنای الهی ، در ابتدا لازم می‌دانم که از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر پرند، استادی که از ابتدای کارشناسی از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره برده‌ام، تشکر و قدردانی نمایم. سپس بر خود لازم می‌دانم که از استاد گرامی سرکار خانم دکتر اسلامی که مشاوره‌ی پایان‌نامه‌ی اینجانب را پذیرفتند، سپاس گزاری کنم و نیز از اساتید ارجمندی که داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از همه‌ی اساتیدم که در مراحل مختلف تحصیلی چراغ راه علم و دانش را بر من روشن کرده و باعث رسیدن من به این مرحله از دریای بیکران دانش گشته‌اند، سپاسگزاری می‌نمایم.

نام خانوادگی دانشجو: بیات بابلقانی نام: فتانه

عنوان: مقایسه‌ی میان توابع متعامد لاگر، هرمیت و سینک

استاد راهنما: جناب آقای دکتر کورش پرند

استاد مشاور: سرکار خانم دکتر زیبا اسلامی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: علوم کامپیوتر گرایش: محاسبات علمی

دانشگاه: شهید بهشتی علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۸

واژگان کلیدی: چندجمله‌ای‌های لاگر، توابع لاگر، چندجمله‌ای‌های هرمیت، توابع هرمیت، توابع سینک، معادلات دیفرانسیل، روش‌های طیفی.

چکیده

رشته‌ی علوم کامپیوتر، پلی میان دانش کامپیوتر و ریاضیات است. محاسبات علمی به عنوان گرایشی از رشته‌ی علوم کامپیوتر، درصدد است بهترین روش حل مسئله در علوم گوناگون را پیدا کند. بسیاری از مسائل در علومی چون فیزیک، شیمی، ریاضی و غیره به‌وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل مدل می‌شوند. این معادلات به دسته‌های چون معمولی و جرئی، خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند.

در این پایان‌نامه در ابتدا نگاه کوتاهی به روش‌های طیفی می‌کنیم، سپس به معرفی چندجمله‌ای‌ها و توابع متعامد لاگر، چندجمله‌ای‌ها و توابع متعامد هرمیت و توابع متعامد سینک به عنوان چندجمله‌ای‌ها و توابعی که در بازه‌ی نیمه نامتناهی و نامتناهی تعریف شده‌اند می‌پردازیم. در انتها از چندجمله‌ای‌ها و توابع ذکر شده با استفاده از روش هم‌مکانی به عنوان یک روش طیفی برای حل معادلات دیفرانسیلی در بازه‌ی نیمه متناهی استفاده می‌کنیم و کارایی آن‌ها را برای حل این نوع معادلات با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

لازم به ذکر است، از این پایان‌نامه مقالاتی در مجلات بین‌المللی ارسال و چاپ شده است.

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیلی که در کاربردهای عملی پدیدار می‌شوند، به‌ندرت به‌طور دقیق حل‌پذیر هستند. حتی زمانی‌که جواب‌های تحلیلی نزدیکی به جواب واقعی بیابیم، استفاده از چنین جواب‌هایی در عمل و برای پیاده‌سازی غیرممکن است. اما باید توجه کرد که روش‌های عددی می‌توانند به خوبی برای حل معادلات دیفرانسیل خوش فرم به‌کار روند. علت توجه به روش‌های عددی برای حل این مسائل، عدم امکان محاسبه‌ی دقیق و سریع جواب‌های تحلیلی آنهاست. زیرا در مواردی هم که جواب تحلیلی وجود دارد، پاسخ غالباً به صورت سری‌های تابعی تعیین می‌شود و از آن‌جا که در مسائل کاربردی و مهندسی به دلیل وسعت و حجم محاسبات، لازم است بیشتر محاسبات به وسیله کامپیوتر صورت گیرد و محاسبه سری‌های مورد نظر تا بینهایت برای کامپیوتر امکان پذیر نیست، باید به تقریبی از سری و یا در نظر گرفتن چند جمله‌ی متناهی از آن اکتفا کرد؛ لیکن در بیشتر مواقع، جوابی که از این تقریب حاصل می‌شود، جواب دقیق و مناسبی نخواهد بود. به همین دلیل محققین روش‌های عددی را برای تقریب تابع جواب این نوع مسائل مطرح کرده‌اند که در بسیاری از موارد عملی، برتری این روش‌ها بر استفاده از روش‌های نیمه‌تحلیلی ثابت شده است.

روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل را می‌توان به دسته‌های زیر تقسیم کرد:

- عناصر محدود
- تفاضلات متناهی
- روش‌های طیفی

هر کدام از روش‌های بالا با توجه به نوع معادله، ناحیه‌ی مورد نظر برای حل معادله و شرایط وابسته به آن، در زمینه‌های مختلف، کارایی گوناگونی دارند.

روش‌های طیفی در حل مسائلی که هندسه‌ی نسبتاً هموار و منظمی دارند بسیار خوب عمل کرده و کارایی و دقت بالایی دارند. اصلی‌ترین خصیصه‌ی روش‌های طیفی این است که توابع متعامد مختلفی را که بینهایت مشتق‌پذیر هستند، به عنوان توابع پایه خود انتخاب می‌کنند. انتخاب توابع اولیه متفاوت، منجر به روش‌های طیفی متفاوت می‌شود.

در این پایان‌نامه از روش طیفی هم‌مکانی بر اساس توابع لاگر، هرمیت و سینک برای حال معادلات دیفرانسیل در بازه‌ی نیمه متناهی استفاده شده است. در فصل اول نگاه گذرایی به روش‌های طیفی در

بازه‌ی متناهی و نیمه متناهی می‌اندازیم. در فصل دوم به معرفی چندجمله‌ای‌ها و توابع لاگر می‌پردازیم. در فصل سوم به معرفی چندجمله‌ای‌ها و توابع هرمیت پرداخته و در فصل چهارم توابع سینک را معرفی می‌کنیم. کاربرد روش هم‌مکانی در حل معادلات دیفرانسیل در بازه‌ی نیمه متناهی، بر اساس توابع لاگر، هرمیت و سینک را در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل ششم نیز به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

روش‌های باقیمانده‌های وزنی و طیفی

۱.۱ مقدمه

کاربرد روش‌های طیفی در سه دهه‌ی گذشته در شاخه‌های مختلف علوم همانند مکانیک سیالات، مکانیک کوانتوم، فیزیک، شیمی و غیره گسترش یافته است و در حال حاضر نیز روش‌های طیفی ابزار قدرتمندی برای حل معادلات دیفرانسیل به صورت عددی به‌شمار می‌روند.

ویژگی فوق‌العاده روش‌های طیفی دقت بالا و همگرایی مرتبه نامتناهی[۱] است. ایده‌ی اصلی این روش‌ها از آنالیز فوریه سرچشمه می‌گیرد. روش‌های طیفی‌ای که به‌طور معمول مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش هم‌مکانی، روش گالرکین و روش تاو می‌باشند که همه‌ی آن‌ها به نوعی از روش باقیمانده‌های وزنی نشأت می‌گیرند [۱، ۲، ۳].

در این فصل ابتدا روش باقیمانده‌های وزنی را شرح خواهیم داد، آنگاه به معرفی انواع روش‌های طیفی و نحوه‌ی انتخاب توابع پایه در این روش‌ها می‌پردازیم. در انتها نیز روش‌های طیفی برای حل مسائل در بازه‌ی نیمه‌متناهی را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲.۱ روش باقیمانده‌های وزنی

روش باقیمانده‌های وزنی یک روش کلی برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلات دیفرانسیل است. در این روش جواب معادله به صورت مجموعی از توابع سعی مشخص، به همراه یک سری ضرایب تعدیل‌پذیر ارائه می‌گردد. جواب بهتر به کمک این ضرایب یافت می‌شود. عناصر کلیدی در این روش توابع سعی و توابع آزمون می‌باشند. توابع سعی به عنوان توابع پایه در بسط سری بریده شده‌ی جواب به‌کار می‌روند. دلیل استفاده از توابع آزمون این است که سری بریده‌شده در معادله‌ی دیفرانسیل تا حد ممکن برقرار باشد. این امر به کمک کمینه‌سازی تابع باقیمانده انجام می‌گیرد.

[۱] این همگرایی را همگرایی طیفی و یا همگرایی نمایی نیز می‌گویند.

معرفی این روش برای اولین بار به کراندال [۴] نسبت داده شده است، هر چند ایده‌ی مشابهی نیز توسط کولاتز [۵] با نام اصول توزیع خطا معرفی گردیده است. این روش به طور جدی توسط فینلیسون، اسکریون و ویچنوتسکی [۶، ۷، ۸] گسترش یافته است.

معادله‌ی دیفرانسیل

$$L(u) = 0, \tag{۱.۱}$$

را در نظر می‌گیریم که باید تحت شرایط اولیه‌ی $I(u) = 0$ و شرایط مرزی $S(u) = 0$ حل شود. برای حل این معادله در ابتدا جواب تقریبی u_N را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \phi_j(x), \tag{۲.۱}$$

که a_jها ضرایب بسط و ϕ_jها توابع تحلیلی شناخته شده‌ای هستند. این توابع را اغلب، توابع پایه، توابع سعی، توابع تقریب و یا توابع بسط و معادله (۲.۱) را جواب سعی گویند. در این روش هدف یافتن ضرایب a_j می‌باشد.

برای حل معادله‌ی (۱.۱) جواب سعی را در آن جایگزین کرده و تابع باقیمانده را تشکیل می‌دهیم:

$$Res(x; a_0, \ldots, a_N) = L(u_N). \tag{۳.۱}$$

برای شرایط اولیه و مرزی نیز داریم:

$$\begin{cases} Res_I(x; a_0, \ldots, a_N) = I(u_N), \\ Res_b(x; a_0, \ldots, a_N) = S(u_N). \end{cases} \tag{۴.۱}$$

جواب تقریبی را می‌توان به گونه‌ای ساخت که:

۱. معادله‌ی دیفرانسیل برقرار باشد، یعنی $Res(x) = 0$. این حالت را روش مرزی می‌نامند.

۲. شرایط مرزی برقرار باشد، یعنی $Res_b(x) = 0$. این حالت را روش درونی می‌نامند.

۳. نه معادله‌ی دیفرانسیل و نه شرایط مرزی برقرار باشند. این حالت را روش آمیخته می‌نامند.

در اینجا روش باقیمانده‌های وزنی بر پایه‌ی روش درونی معرفی می‌شوند، یعنی توابع سعی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $u_N(x)$ در شرایط مرزی و شرایط اولیه (در صورت امکان) به‌طور دقیق برقرار باشد. فرمول‌بندی ارائه شده را می‌توان برای روش‌های مرزی و آمیخته نیز توسعه داد.

برای به‌دست آوردن معادلات مربوط به a_jها، ضرب داخلی باقیمانده‌ی وزنی برابر صفر قرار داده می‌شود:

$$\langle Res(x; a_0, \ldots, a_N), \psi_k(x) \rangle = \int_D Res(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad k = 0, \ldots, N. \tag{۵.۱}$$

این روش نامش را از این رابطه می‌گیرد. ψ_kها را توابع آزمون و به ندرت توابع وزن نیز می‌نامند.

چون برای یافتن ضرایب a_j به روابط مستقل نیاز است، ψ_kها باید توابع مستقل باشند. اگر ψ_kها اعضای مجموعه‌ی کاملی از توابع باشند، آنگاه هنگامی که $N \to \infty$، معادله (۵.۱) می‌رساند که

باقیمانده‌ی معادله باید با هر عضو مجموعه‌ی کامل توابع، متعامد باشد. این ایجاب می‌کند که باقیمانده در حد $N \to \infty$ به صفر همگرا شود. اگر باقیمانده به صفر همگرا شود و معادله‌ی (۲.۱) به‌طور دقیق در شرایط مرزی صدق کند، آن‌گاه انتظار می‌رود جواب تقریبی u_N به جواب دقیق معادله‌ی (۱.۱) همگرا شود، یعنی

$$\lim_{N\to\infty} \|u_N - u\|_۲ = ۰. \tag{۶.۱}$$

این را می‌توان با همگرایی یکنواخت که به صورت زیر تعریف می‌شود مقایسه کرد:

$$\lim_{N\to\infty} \|u_N - u\|_\infty = ۰, \tag{۷.۱}$$

که

$$\|u_N - u\|_\infty = \max |u_N - u|. \tag{۸.۱}$$

معادله‌ی (۵.۱) حالت ضعیفی از معادله‌ی

$$\langle L(u), \psi \rangle = ۰, \tag{۹.۱}$$

است که در اینجا ψ تابع آزمون کلی است.

ضرب داخلی استفاده شده در معادله‌ی (۵.۱) برای بازه‌ی پیوسته تعریف شده است. این ضرب می‌تواند به صورت گسسته نیز تعریف شود. استفاده از ضرب داخلی گسسته به روش گسسته‌ی باقیمانده‌های وزنی منجر می‌شود که تکنیک مناسبی برای مسائل مقدار مرزی گسسته می‌باشد.

اهمیت معادله‌ی (۵.۱) این است که انتخاب‌های متفاوت از تابع وزن با روش‌های مختلف متناظر می‌باشد. رایج‌ترین این روش‌ها در این‌جا توضیح داده شده‌اند.

۱.۲.۱ روش زیردامنه

در روش زیردامنه، دامنه به N زیربازه‌ی D_i تقسیم می‌شود که ممکن است اشتراک نیز داشته باشند. در این روش تابع آزمون بدین صورت انتخاب می‌شود:

$$\psi_k(x) = \begin{cases} ۱, & x \in D_k, \\ ۰, & x \notin D_k. \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

با این انتخاب توابع آزمون، معادلات لازم برای یافتن ضرایب a_k به این شکل درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle Res(x), \psi_k(x) \rangle &= \int_D Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_i \int_{D_i} Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{D_k} Res(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x, \qquad k = ۰, ۱, \ldots, N. \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

در این روش با افزایش N معادله روی زیربازه‌ها کوچک و کوچک‌تر و در نهایت احتمالاً همه جا برقرار می‌شود. این روش، مشابه روش عناصر محدود، روش شناخته شده‌ای در مکانیک سیالات و

انتقال گرما می‌باشد. روش زیردامنه از کار بیزنو و کچ [۹] سرچشمه می‌گیرد و در مقالات [۱۰، ۱۱] نیز کاربردهایی از آن وجود دارد.

۲.۲.۱ روش هم‌مکانی

روش هم‌مکانی ساده‌ترین روش باقیمانده‌های وزنی است. در این روش تابع آزمون به صورت

$$\psi_k(x) = \delta(x - x_k), \tag{۱۲.۱}$$

در نظر گرفته می‌شود که δ، تابع دلتای دیراک است. بنابر ویژگی دلتای دیراک که

$$\langle u, \delta(x - x_k) \rangle = u(x_k), \tag{۱۳.۱}$$

معادله‌ی (۵.۱) به

$$Res(x_k; a_0, \dots, a_N) = 0, \qquad k = 0, \dots, N, \tag{۱۴.۱}$$

تبدیل می‌شود، یعنی معادله‌ی دیفرانسیل نیاز است تا به‌طور دقیق در $N+1$ گره‌ی هم‌مکانی صادق باشد. در اینجا با افزایش مقدار N، تابع باقیمانده در نقاط بیش‌تر و بیش‌تری و احتمالاً همه جا صفر می‌شود. این روش برای نخستین بار توسط اسلتر [۱۲] برای حل معادلات دیفرانسیل به‌کار رفت. کاربردهای نوین‌تر آن و همچنین نام‌گذاری این روش به فریزر و همکارانش [۱۳] برمی‌گردد. آن‌ها توابع سعی مختلفی را به‌کار بردند و از نقاط هم‌مکانی دلخواه استفاده کردند. لانکزوس [۱۴] جواب را به صورت چندجمله‌ای‌های چبیشف بسط داد و از ریشه‌های چبیشف برای نقاط هم‌مکانی استفاده کرد. ویلادسن و استوارت [۱۵] روش لانکزوس را احیا کرده و روشی به نام هم‌مکانی متعامد معرفی کردند که اثبات شده است روش مناسبی است. آن‌ها صفرهای چندجمله‌ای‌های ژاکوبی را در معادله قرار دادند و از چندجمله‌ای‌های چبیشف به عنوان توابع سعی استفاده کردند.

۳.۲.۱ روش کم‌ترین مربعات

در روش کم‌ترین مربعات به جای کمینه‌سازی مستقیم تابع باقیمانده، a_kها به قسمی انتخاب می‌شوند که

$$S = \int_D Res(x) Res(x) \mathrm{d}x = \langle Res, Res \rangle, \tag{۱۵.۱}$$

کمینه باشد. دلیل نام‌گذاری روش نیز همین می‌باشد. برای کمینه‌سازی تابع S، مشتقات آن نسبت به ضرایب مجهول a_k در معادله‌ی (۲.۱) را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2 \int_D Res \frac{\partial Res}{\partial a_k} \mathrm{d}x = 0. \tag{۱۶.۱}$$

بنابراین توابع آزمون به صورت

$$\psi_k = \frac{\partial Res}{\partial a_k}, \tag{۱۷.۱}$$

خواهند بود.

این روش به طور ذاتی برای مسائل یکنواخت مناسب است که در آن انتظار می‌رود کمینه‌سازی مربع باقیمانده، کم‌ترین مقدار $\|u_N - u\|$ را ایجاب کند. روش کم‌ترین مربعات اغلب به معادلات سنگینی منجر می‌شود و در حالت کلی کاربرد آن به تنهایی مناسب نیست. این روش را می‌توان به عنوان یک وزن اضافه برای زمان، در مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی در نظر گرفت.

روش کم‌ترین مربعات در سال ۱۹۷۵ توسط گاوس برای تخمین حداقل مربعات ایجاد شد و قدیمی‌ترین روش باقیمانده‌های وزنی است.

۴.۲.۱ روش گشتاورها

در روش گشتاورها توابع آزمون

$$\psi_k(x) = x^k, \qquad (۱۸.۱)$$

انتخاب می‌شود. دلیل نام‌گذاری روش نیز همین می‌باشد، زیرا در آمار به $\langle x^i, f(x)\rangle$، iامین گشتاور $f(x)$ گفته می‌شود. توان‌های بالای x بر اثر خطای گرد کردن وابسته‌ی خطی می‌شوند. به همین دلیل استفاده از آن‌ها به عنوان توابع سعی مناسب نیست. این روش تنها زمانی مناسب است که N بسیار کوچک باشد و همچنین محاسبات با دقت بالایی انجام پذیرد. در حالتی که توابع سعی توان‌های x باشند، روش گشتاورها با روش گالرکین هم‌ارز است.

روش گشتاورها توسط یامادا [۱۶] گسترش یافت. روش روابط انتگرالی که بعدها توسط درودنیتسین [۱۷] معرفی شد به طور نزدیکی با این روش مرتبط است. در روش روابط انتگرالی تابع وزن عبارت است از:

$$\psi_k(x) = (1 - x)^k. \qquad (۱۹.۱)$$

۵.۲.۱ روش گالرکین

روش گالرکین را می‌توان به عنوان بهبودی از روش کم‌ترین مربعات در نظر گرفت که در آن به‌جای استفاده از مشتق تابع باقیمانده نسبت به ضرایب مجهول، به عنوان توابع آزمون، مشتقات جواب سعی نسبت به ضرایب a_k را به عنوان توابع آزمون انتخاب می‌کنیم:

$$\psi_k(x) = \frac{\partial u_N}{\partial a_k} = \phi_k(x), \qquad (۲۰.۱)$$

بنابراین در روش گالرکین توابع وزن از همان خانواده‌ی توابع سعی می‌باشند.

در این روش توابع آزمون و سعی باید از N تابع اول مجموعه‌ی کاملی از توابع انتخاب شوند. این شرط لازم برای همگرایی به جواب دقیق، هنگامی که $N \to \infty$، می‌باشد. همچنین توابع سعی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در شرایط مرزی همگن صدق کنند. تعامد توابع سعی، یافتن جواب برای Nهای بزرگ‌تر را آسان‌تر می‌سازد.

روش گالرکین توسط مهندسی روسی به همین نام در سال ۱۹۱۵ معرفی گردید. بسیاری از کاربردهای این روش توسط کولاتز [۵]، فینلیسون و اسکریون [۶]، فینلیسون [۸]، دانکن [۱۸، ۱۹]، ایمز [۲۰] و فلچر [۲۱] ارائه شده است.

۳.۱ روش‌های طیفی

در بخش پیشین، شالوده‌ی اصلی روش‌های طیفی یعنی روش باقیمانده‌های وزنی را معرفی کردیم. در واقع روش‌های طیفی را می‌توان به عنوان توسعه‌ای از روش باقیمانده‌های وزنی در نظر گرفت. همان‌طور که گفته شد، ایده‌ی اصلی این روش، تقریب تابع مجهول $u(x)$ به صورت مجموعی از توابع پایه و سپس جایگذاری این تابع تقریب در معادله و تشکیل معادله‌ی باقیمانده می‌باشد. چون برای جواب دقیق، تابع باقیمانده برابر صفر می‌باشد، بنابراین هدف، یافتن ضرایب a_j است به قسمی که تابع باقیمانده کمینه شود. کمینه‌سازی تابع باقیمانده به کمک توابع آزمون انجام می‌پذیرد که انتخاب‌های متفاوت از توابع آزمون، روش‌های متفاوتی را به وجود می‌آورد.

روش‌های طیفی به دو زیرشاخه‌ی اصلی تقسیم می‌شوند:

- روش‌های درونیاب یا شبه‌طیفی
- روش‌های غیردرونیاب

در روش درونیاب، برای حل معادلات مجموعه‌ای از گره‌ها که نقاط هم‌مکانی نام دارند به‌کار برده می‌شود که با جایگذاری آن‌ها در متغیر تابع، ضرایب مجهول به‌دست می‌آیند. روش‌های این زیرشاخه را روش نقاط انتخابی یا هم‌مکانی نیز می‌نامند.

در روش‌های غیردرونیاب هیچ شبکه‌ای از نقاط درونیاب وجود ندارد، بلکه ضرایب مجهول از طریق انتگرال‌گیری و محاسبه‌ی ضرب داخلی بین تابع باقیمانده و توابع آزمون به‌دست می‌آیند. روش تاو و گالرکین جزء این دسته از روش‌ها به‌شمار می‌روند.

روش‌های درونیاب یا شبه‌طیفی

روش شبه‌طیفی با هر مجموعه‌ی پایه، شبکه‌ای از نقاط (گره‌ها) را وابسته می‌سازد که نقاط هم‌مکانی یا درونیابی نامیده می‌شوند. در این روش ضرایب تابعی معلوم مانند $f(x)$ با برابر قرار دادن مقدار سری بریده شده و مقدار تابع $f(x)$ در هر نقطه از شبکه به‌دست می‌آید. به‌طور مشابه برای بدست آوردن ضرایب a_j در جواب تقریبی معادله، تابع باقیمانده در نقاط هم‌مکانی برابر با صفر قرار داده شده

$$Res(x_k; a_0, \ldots, a_N) = 0, \qquad k = 0, \ldots, N-m, \tag{۲۱.۱}$$

و با در نظر گرفتن m شرط مرزی و اولیه، دستگاه معادلاتی با $N+1$ عضوی به‌دست می‌آید که با حل آن، $N+1$ مجهول a_j محاسبه می‌شوند [۲، ۱۲، ۱۳، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵].

به عبارت دیگر روش شبه‌طیفی بیان می‌دارد که معادله‌ی دیفرانسیل باید دقیقاً در مجموعه‌ای از گره‌ها برقرار باشد. به‌طور واضح هرچه N افزایش یابد باقیمانده در نقاط بیشتری صفر خواهد شد. بنابراین $u_N(x)$ با افزایش N به $u(x)$ همگرا می‌شود. روش‌های این زیرشاخه را روش نقاط انتخابی یا هم‌مکانی نیز می‌نامند. هر چند روش هم‌مکانی نسبت به روش شبه‌طیفی کلی‌تر است اما در این پایان‌نامه منظور از روش هم‌مکانی همان روش شبه‌طیفی می‌باشد که تنها با توابع پایه عمودی به‌کار می‌رود.

روش‌های غیردرونیاب

زیرشاخه‌ی غیردرونیاب شامل روش‌های گالرکین و تاو می‌باشد. در این روش‌ها هیچ شبکه‌ای از نقاط درونیاب وجود ندارد. ضرایب تابعی معلوم مانند $f(x)$ توسط ضرب $f(x)$ در تابع آزمون و سپس انتگرال‌گیری (منظور ضرب داخلی است) محاسبه می‌شود. از لحاظ تاریخی ابتدا روش‌های غیردرونیاب گسترش یافتند، به همین دلیل برخی عنوان طیفی را فقط برای این روش‌ها به‌کار می‌برند.

در روش گالرکین توابع سعی از مجموعه‌ی کاملی از توابع انتخاب می‌شوند و چون توابع آزمون و سعی از یک خانواده می‌باشند، بنابراین با استفاده از تعداد کافی جمله این روش قابلیت نمایش جواب دقیق را دارد. در واقع روش گالرکین تابع باقیمانده را از طریق متعامدسازی آن با هر عضو مجموعه‌ی کامل توابع (در حد $N \to \infty$) صفر می‌کند.

در این روش پس از جایگذاری تابع تقریب u_N در معادله، تابع باقیمانده به صورت مجموع توابع پایه نوشته می‌شود:

$$Res(x; a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i(a_0, \dots, a_N)\phi_i(x). \tag{۲۲.۱}$$

در اینجا ضرایب r_i توسط ضرب داخلی عادی محاسبه می‌شوند:

$$r_i = \frac{\langle Res, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}. \tag{۲۳.۱}$$

بدیهی است هر چه تعداد ضرایب r_i بیش‌تری صفر گردد، آن‌گاه باقیمانده روی دامنه، کوچک و کوچک‌تر خواهد شد. برای یافتن ضرایب a_j، $N+1$ ضریب اول را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$r_i = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, N. \tag{۲۴.۱}$$

این هم‌ارز با این است که:

$$\langle Res, \phi_i \rangle = 0, \qquad i = 0, 1, \dots, N. \tag{۲۵.۱}$$

در روش گالرکین توابع آزمون، توابع نامتناهی هموار هستند که به‌طور جداگانه در شرایط مرزی همگن، صادق می‌باشند. روش تاو بهبودی از روش گالرکین است که برای مسائل شرایط مرزی غیرمتناوب به‌کار می‌رود. در این روش، کمینه‌سازی تابع باقیمانده همانند روش گالرکین صورت می‌پذیرد. تنها تفاوت در این است که شرایط مرزی نیز به عنوان محدودیت اعمال می‌گردد، یعنی نیازی نیست که توابع آزمون در شرایط مرزی صادق باشند. با وجود تفاوت بین این دو روش، خطای بین آن‌ها قابل چشم‌پوشی است.

حال به بررسی جزئی‌تر روش تاو برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌پردازیم:

در این روش ابتدا $u(x)$ را به صورت مجموع $N+1$ تابع پایه‌ای بسط داده و آن را به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j \phi_j(x) = A^T \phi(x), \tag{۲۶.۱}$$

$$A = [a_0, a_1, ..., a_N]^T, \tag{۲۷.۱}$$

$$\phi(x) = [\phi_0(x), \phi_1(x), ..., \phi_N(x)]^T, \tag{۲۸.۱}$$

که $\phi(x)$ برداری از توابع دو به دو متعامد و کامل می‌باشد.

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $L(u) = 0$ ممکن است به مشتقات تابع $u(x)$ نیز نیاز باشد که برای محاسبه‌ی آن‌ها از ماتریس عملیاتی مشتق به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}
u_N^{(1)}(x) &= \sum_{j=0}^{N} a_j \phi_j^{(1)}(x) = A^T D \phi(x),\\
u_N^{(2)}(x) &= \sum_{j=0}^{N} a_j \phi_j^{(2)}(x) = A^T D^2 \phi(x),\\
&.\\
&.\\
&.\\
u_N^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{N} a_j \phi_j^{(n)}(x) = A^T D^n \phi(x)
\end{aligned} \tag{۲۹.۱}$$

در صورت نیاز ماتریس‌های عملیاتی ضرب نیز برای تکمیل معادله‌ی دیفرانسیل به‌کار برده می‌شوند.

در آخر با تشکیل تابع باقیمانده و محاسبه‌ی ضرب داخلی آن با توابع پایه و در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی مسأله، ضرایب مجهول a_j به‌دست می‌آیند:

$$\langle Res(x_k; a_0, \ldots, a_N), \phi_k \rangle = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-m, \tag{۳۰.۱}$$

که m تعداد شرایط مرزی و اولیه است [۲، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹].

۱.۳.۱ انتخاب توابع پایه

انتخاب توابع پایه یکی از ویژگی‌هایی است که روش‌های طیفی را از روش‌های عناصر محدود و تفاضلات متناهی متمایز می‌کند. توابع پایه در روش‌های طیفی، توابع عمومی بینهایت مشتق‌پذیر می‌باشند که باید دارای چنین ویژگی‌هایی باشند:

- محاسبه‌ی آسان

- همگرایی سریع
- کامل بودن

در مسائل متناوب، انتخاب توابع پایه آسان است. بسط‌های مثلثاتی، خصوصاً سری‌های فوریه بهترین انتخاب می‌باشند [۳۰، ۳۱]. در مسائل غیر متناوب، انتخاب توابع پایه به این سادگی نیست. در این‌گونه مسائل ساده‌ترین انتخاب می‌تواند توان‌های x باشد؛ اما انتخاب این توابع به عنوان پایه جز در مواردی که N کوچک باشد یا محاسبات ریاضی با دقت بالایی انجام می‌پذیرد، نامناسب است [۳۱].

استفاده از توابع متعامد در روش‌های طیفی بسیار معمول است. ویژگی‌های خاص این توابع، انجام محاسبات را بسیار آسان می‌کند. مهم‌ترین ویژگی تعامد این است که اگر تابع $f(x)$ را به صورت مجموع توابع متعامد بسط دهیم آن‌گاه

$$\langle f(x), \phi_i \rangle = \sum_{j=0}^{N} a_j \langle \phi_j, \phi_i \rangle \Rightarrow a_i = \frac{\langle f(x), \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}. \qquad (۳۱.۱)$$

لازم به ذکر است که ساخت مجموعه‌های متعامد نیز بسیار آسان است. این کار توسط روش بازگشتی گرام-اشمیت صورت می‌گیرد.

مشکلی که در استفاده از توابع متعامد وجود دارد، این است که همه‌ی رده‌های توابع متعامد کامل نیستند. برای حل این موضوع از توابعی که توسط معادلات ویژه‌ی اشتورم-لیوویل ساخته می‌شوند، استفاده می‌گردد. توابع تولید شده توسط معادلات اشتورم-لیوویل متعامد و کامل هستند.

۲.۳.۱ روش‌های طیفی در بازه‌های نیمه‌متناهی

از روش‌های طیفی می‌توان برای حل مسائل در فاصله‌ی نیمه‌متناهی نیز استفاده کرد. روش‌های طیفی مختلفی که برای حل این‌گونه مسائل به‌کار رفته‌اند عبارتند از:

- استفاده از چندجمله‌ای‌ها و توابع لاگر [۲۸، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶]
- برش بازه‌ی نیمه‌متناهی به صورت $[0, x_{max}]$ و انتخاب x_{max} به اندازه‌ی کافی بزرگ (این روش را برش دامنه می‌نامند.) [۳۱]
- تبدیل مسأله در بازه‌ی نیمه‌متناهی به مسأله در بازه‌ی متناهی (به کمک تغییر متغیر) و استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برای حل مسأله در بازه‌ی متناهی [۳۷، ۳۸]
- تبدیل توابع در بازه‌ی متناهی به توابع در بازه‌ی نیمه‌متناهی (به کمک تغییر متغیر)، همانند توابع گویای چبیشف و گویای لژاندر و استفاده از آن‌ها به عنوان توابع پایه‌ای [۲۹، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲]

هرتابع $u \in L_w^2(0, \infty)$ را می‌توان به صورت مجموع چندجمله‌ای‌های لاگر بسط داد. همگرایی این سری‌ها سریع‌تر از همگرایی جبری است، مشروط بر این‌که همه مشتقات تابع متعلق به $L_w^2(0, \infty)$

باشند. چندجمله‌ای‌های لاگر توابع ویژه‌ی مسائل اشتورم-لیوویل هستند که در هر دو سر پایانی بازه تکین می‌باشند. با تابع وزنی که با سرعت نمایی در بینهایت به صفر نزدیک می‌شود، این سری‌ها دارای همگرایی متوسطی هستند در حالی که چندجمله‌ای‌های بسط بیکران می‌باشند. بنابراین کارایی تقریب برای N ثابت ممکن است با میل کردن x به بینهایت بدتر شود. مثلاً ممکن است در بینهایت دارای نوسانات بیکرانی باشد. برای جلوگیری از چنین مشکلاتی برای تقریب توابعی که در بینهایت صفر می‌شوند، بهتر است از بسط با توابع لاگر استفاده شود. لازم به ذکر است برای تابع بینهایت هموار $u \in L_w^۲(۰,\infty)$، همگرایی طیفی سری‌های بریده شده از توابع لاگر تنها زمانی روی می‌دهد که u با سرعت نمایی در بینهایت نزول کند.

هنگامی که از روش برش دامنه برای بازه‌ی نیمه‌متناهی استفاده می‌شود، با افزایش x_{max} دقت مرتبه‌ی نامتناهی تنها زمانی حاصل می‌شود که تعداد جملات سری افزایش یابد. بوید [۴۳] راهکارهایی را برای افزایش x_{max} با N ارائه کرده است.

استفاده از نگاشت‌های $x = \phi(\xi)$ که در آن $\phi : [-۱,۱] \to [۰,\infty)$ بسیار مورد توجه است. با به‌کار بردن این نگاشت‌ها می‌توان ویژگی‌های همگرایی تقریب $u(x)$ را از رفتار تابع $v(\xi) = u(\phi(\xi))$ تشخیص داد. یعنی با جایگذاری $\phi(\xi)$ به جای x، مسأله در بازه‌ی نیمه‌متناهی به مسأله در بازه‌ی متناهی تبدیل می‌گردد. هنگامی که $v(\xi)$ روی $[-۱,۱]$ بینهایت مشتق‌پذیر است، دقت مرتبه‌ی نامتناهی انتظار می‌رود. با فرض این‌که $u(x)$ نیز در $[۰,\infty)$ بینهایت مشتق‌پذیر باشد، بحث رفتار مشتقات $v(\xi)$ در $\xi = \pm ۱$ مطرح می‌شود. با کمی تسامح دقت طیفی یکنواخت به‌دست می‌آید مشروط بر این‌که مشتقات $u(x)$ در $x \to \infty$ به اندازه‌ی کافی سریع نزول کنند و به اندازه‌ی کافی آهسته نوسان کنند.

رایج‌ترین نگاشت‌های به‌کار رفته عبارتند از:

نگاشت جبری

$$x = L\frac{۱+\xi}{۱-\xi}. \tag{۳۲.۱}$$

نگاشت نمایی

$$x = -L\ln\frac{۱-\xi}{۲}. \tag{۳۳.۱}$$

نگاشت لگاریتمی

$$x = \frac{L}{۲}\ln\frac{۳+\xi}{۱-\xi}. \tag{۳۴.۱}$$

نگاشت جبری بیشتر گره‌های هم‌مکانی را به مقادیر بالاتر x و نگاشت لگاریتمی به مقادیر کمتر x می‌نگارد. بنابراین نگاشت جبری برای تقریب توابعی که در بینهایت نسبتاً آهسته نزول می‌کنند مانند $\frac{۱}{x}$ مناسب است. در حالی که نگاشت‌های لگاریتمی و نمایی برای توابعی که نزول سریع دارند مثلاً نزول نمایی، مناسب‌تر می‌باشند. برخلاف بسط‌ها روی بازه‌های متناهی، بسط‌های طیفی روی دامنه‌ی نیمه‌متناهی دارای دو پارامتر گسسته‌سازی می‌باشد؛ مقیاس طول L و پارامتر برشی N. به عنوان یک قانون کلی، مقیاس طول L باید با N افزایش یابد تا دقت طیفی به‌دست آید [۳۱].

به طریقی مشابه، می‌توان عکس عملی که برای تبدیل مسأله در بازه‌ی نیمه‌متناهی به مسأله در بازه‌ی متناهی معرفی شد را در مورد توابع پایه انجام داد. یعنی می‌توان با استفاده از نگاشت‌هایی که بازه‌ی نیمه‌متناهی را به بازه‌ی متناهی می‌نگارد، مجموعه‌های پایه در بازه‌ی متناهی را به مجموعه‌های پایه در بازه‌ی نیمه‌متناهی تبدیل کرد. به وسیله‌ی این روش پایه‌های گوناگونی برای بازه‌های نیمه‌متناهی یافت می‌شود. این پایه‌ها می‌تواند تصاویر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تحت نگاشت مورد نظر باشد.

نگاشت‌های زیادی برای انتقال بازه‌ی $(\infty, ۰]$ به بازه‌ی $[۱, ۱-]$ وجود دارد. مهم‌ترین آن‌ها معکوس نگاشت‌هایی است که برای انتقال بازه $[۱, ۱-]$ به بازه نیمه‌متناهی به‌کار رفت:

نگاشت جبری

$$\xi = \frac{x-L}{x+L}. \qquad (۳۵.۱)$$

نگاشت نمایی

$$\xi = ۱ - ۲e^{-\frac{x}{L}}. \qquad (۳۶.۱)$$

نگاشت لگاریتمی

$$\xi = -۱ + ۲\tanh\left(\frac{x}{L}\right). \qquad (۳۷.۱)$$

بوید [۴۳] اشاره می‌کند که مقدار L را با تجربه مشخص می‌سازد. او در مورد مقدار L به تأثیر آن بر نرخ همگرایی اشاره می‌کند، ولی از روی آزمایش مقدار و بازه‌ی مناسب برای L را تعیین می‌کند[۴۴].

فصل ۲

چندجمله‌ای‌ها و توابع لاگر

۱.۲ مقدمه

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته و توابع لاگر در بازه‌ی $[\circ, +\infty)$ تعریف شده‌اند و دارای خاصیت تعامد می‌باشند، در نتیجه برای حل مسائل در بازه‌ی نیمه متناهی می‌توانند چندجمله‌ای‌ها و توابع مناسبی باشند.

در این فصل به معرفی چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته و توابع لاگر می‌پردازیم و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۲ چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته با $L_n^\alpha(x)$ نمایش داده می‌شوند که در آن $L_n^\alpha(x)$، nامین تابع معادله‌ی اشتروم-لیوویل زیر است[۴۵، ۴۶، ۴۷]:

$$x\frac{d^۲}{dx^۲}L_n^\alpha(x) + (\alpha + ۱ - x)\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) + nL_n^\alpha(x) = \circ,$$
$$x \in I = [\circ, \infty), \qquad n = \circ, ۱, ۲, \ldots. \tag{۱.۲}$$

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته با فرمول بازگشتی زیر تعریف می شوند[۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸]:

$$\begin{aligned}
&L_\circ^\alpha(x) = ۱,\\
&L_۱^\alpha(x) = ۱ + \alpha - x,\\
&nL_n^\alpha(x) = (۲n - ۱ + \alpha - x)L_{n-۱}^\alpha(x) - (n + \alpha - ۱)L_{n-۲}^\alpha(x),\\
&n \geq ۲, \quad \alpha \succ -۱,
\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

با وضعیت نرمال شده ی $L_n^{\alpha}(\circ) = \begin{pmatrix} n+\alpha \\ n \end{pmatrix}$.

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته متعامد می‌باشند و دارای تابع وزن $w_\alpha = x^\alpha e^{-x}$ هستند. رابطه‌ی تعامد این چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر است:

$$\int_{\circ}^{+\infty} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) w_\alpha(x) dx = \left(\frac{\Gamma(n+۱+\alpha)}{n!}\right)\delta_{nm},$$

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$L_n^\alpha(x) = \partial_x L_n^\alpha(x) - \partial_x L_{n+۱}^\alpha(x), \tag{۳.۲}$$

$$\partial_x L_n^\alpha(x) = -\sum_{k=\circ}^{n} L_k^\alpha(x). \tag{۴.۲}$$

چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته در محاسبات ناپایداری ایجاد می‌کنند. برای مثال در شکل (۲.۵.۱) نمودارهای $L_۱^\alpha, L_۲^\alpha, ..., L_۸^\alpha$ در بازه‌ی $x \in [\circ, ۵\circ]$ و $y \in [-۱\circ\circ\circ, ۱\circ\circ\circ]$ نمایش داده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید برای مقادیر کوچک n، محاسبه‌ی L_n^α در مقادیر زیاد x دقیق نیست. این نوسان تند در قسمتی از بازه، در مقایسه با مقادیر نسبتاً کم ابتدای بازه‌ی $[\circ, +\infty)$ موجب بدوضعی در حل مسائل می‌شود. برای کنترل بیشتر چندجمله‌ای‌های لاگر در نقاط دورتر از صفر، با ضرب تابعی که سرعت نزول سریع‌تری دارد، توابع دیگری به‌دست می‌آوریم. در مواقعی که مقدار جواب یک معادله‌ی غیر خطی در بی‌نهایت مساوی صفر است، توابع حاصل شده به ما کمک شایانی می‌کنند.

تابع لاگر توسعه یافته ℓ_k^α به صورت زیر تعریف می‌شود[۴۹، ۵۰، ۵۱]:

$$\ell_k^\alpha = e^{\frac{-x}{۲}} L_k^\alpha(x), \quad \alpha \succ -۱, \qquad n = \circ, ۱, ۲, ... \tag{۵.۲}$$

تابع لاگر در برخی از کتاب‌ها با $l_k^\alpha = e^{-x} L_k^\alpha(x)$ نیز بیان می‌شود. این توابع نیز متعامد می‌باشند.

ما تابع لاگر اصلاح‌شده‌ی ϕ_j را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

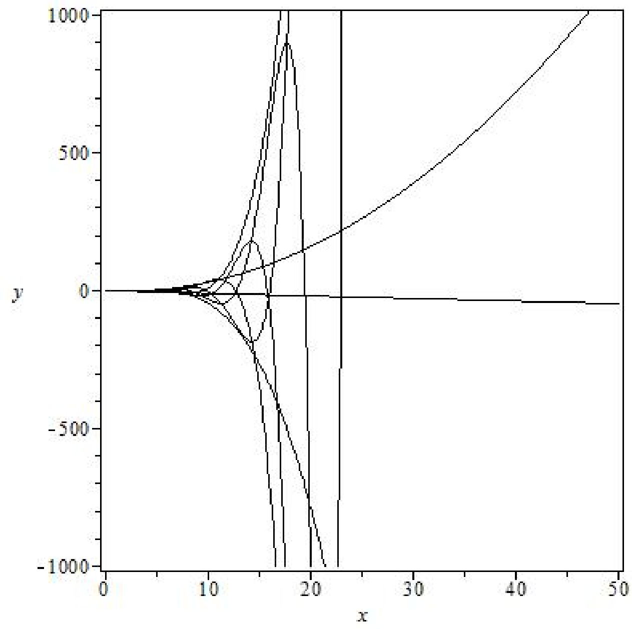
$$\phi_j(x) = \ell_j^\alpha\left(\frac{x}{L}\right), \quad L \succ \circ. \tag{۶.۲}$$

استفاده از پارامتر ثابت بهبوددهنده‌ی L را بوید پیشنهاد داده است[۴۳، ۵۲، ۵۳، ۵۴].

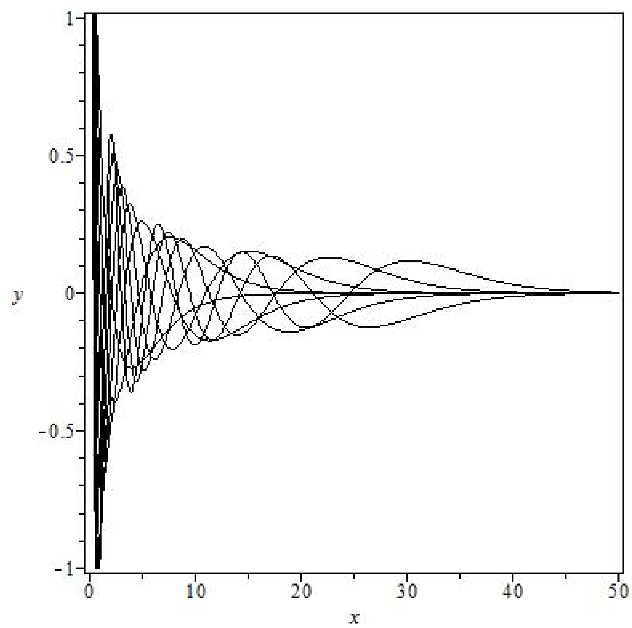
در اشکال (۱.۲.۵)و (۲.۲.۵) مقایسه‌ای از لحاظ میزان نوسان چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته و توابع لاگر اصلاح‌شده‌ی را نشان می‌دهیم.

۳.۲ انتگرال‌گیری گاوسی

فرمول‌های انتگرالی گاوسی و نقاط گاوسی برای توابع و چندجمله‌ای‌های لاگر توسط ایرانزو و فلاکوئس معرفی گردید[۵۵].



شکل ۲.۱: چندجمله‌ای‌های لاگر توسعه‌یافته: $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$



شکل ۲.۲: توابع لاگر اصلاح‌شده: $n = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$

در این‌جا رابطه‌ی بین چندجمله‌ای‌های متعامد و فرمول‌های انتگرالی گاوسی را در قالب قضایای زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۲. (انتگرال‌گیری گاوسی). اعداد مثبت $\lambda_N, \lambda_{n-1}, ..., \lambda_1, \lambda_0$ وجود دارند به‌طوری که برای هر چندجمله‌ای $f(\xi) \in P_{2N+1}$،

$$\int_a^b f(\xi)\rho(\xi)d\xi = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f(\xi), \tag{۷.۲}$$

که ξ_jها ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد $p_{N+1}(\xi)$ هستند.

برهان. فرض کنید $f(\xi)$ یک چندجمله‌ای دلخواه از هر درجه‌ای باشد. بنابر الگوریتم تقسیم

$$f(\xi) = p_{N+1}(\xi)q(\xi) + r(\xi), \tag{۸.۲}$$

که $p_{N+1}(\xi)$ نسبت به وزن تعریف شده متعامد است و درجه‌ی $r(\xi)$ کمتر از $N+1$ است.

چون ξ_jها صفرهای $p_{N+1}(\xi)$ هستند داریم:

$$f(\xi) = r(\xi), \quad j = 0, 1, ..., N. \tag{۹.۲}$$

پس

$$\int_a^b f(\xi)\rho(\xi)d\xi = \int_a^b p_{N+1}(\xi)q(\xi)\rho(\xi)d\xi + \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f(\xi), \tag{۱۰.۲}$$

که λ_j وزن‌های مربع‌سازی و یا اعداد کریستفل نامیده می‌شوند. حال (۳۲.۵) دقیق است اگر

$$\int_a^b p_{N+1}(\xi)q(\xi)\rho(\xi)d\xi = 0, \tag{۱۱.۲}$$

چون (۳۶.۵) برای $q(\xi)$ که از درجه‌ی کم‌تر از $N+1$ باشد، دقیق است (بنابر خاصیت تعامد)، نتیجه می‌شود که رابطه‌ی (۳۲.۵) برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی $2N+1$ دقیق است.

حال تنها باید نشان دهیم λ_jها مثبت هستند. چندجمله‌ای‌های $\ell_j^2(\xi) - \ell_j(\xi)$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای از درجه‌ی $2N$ است که در نقاط $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_N$، صفر می‌شود. پس $\ell_j^2(\xi) - \ell_j(\xi) = p_{N+1}(\xi)q(\xi)$ که درجه‌ی $N-1$ است. بنابراین

$$\int_a^b (\ell_j^2(\xi) - \ell_j(\xi))\rho(\xi)d\xi = \int_a^b p_{N+1}(\xi)q(\xi)\rho(\xi)d\xi = 0, \tag{۱۲.۲}$$

و

$$\lambda_j = \int_a^b \ell_j(\xi)\rho(\xi)d\xi = \int_a^b \ell_j^{۲}(\xi)\rho(\xi)d\xi \succ ۰. \qquad (۱۳.۲)$$

□

همه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد $p_N(\xi)$ تعریف شده بر بازه‌ی $[a,b]$، درون بازه قرار می‌گیرند، بنابراین چنان‌چه نیاز به اعمال شرایط مرزی در معادله داشته باشیم، باید انتگرال‌گیری گوسی را تعمیم دهیم به گونه‌ای که شامل نقاط مرزی گردد. انتگرال‌گیری گوس-رادو و گاوس-لوباتو برای همین منظور به‌کار می‌روند.

در انتگرال‌گیری گاوس-رادو تنها یکی از نقاط مرزی را وارد انتگرال‌گیری می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۲. (انتگرال‌گیری گاوس-رادو). اعداد مثبت $\lambda_n, \lambda_{n-۱}, ..., \lambda_۱, \lambda_۰$ وجود دارند به‌طوری که برای هر چندجمله‌ای $f(\xi) \in P_{۲N}$،

$$\int_a^b f(\xi)\rho(\xi)d\xi = \sum_{j=۰}^{N} \lambda_j f(\xi), \qquad (۱۴.۲)$$

که ξ_jها ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد $p_{N+۱}(\xi) - \frac{p_{N+۱}(c)}{p_N(c)}p_N(\xi)$ هستند و c نقطه‌ی مرزی مورد نظر یعنی a یا b می‌باشد.

برهان. صفحه‌ی ۷۲[۵۶]. □

انتگرال‌گیری گاوس-لوباتو زمانی به‌کار می‌رود که بخواهیم هر دو نقطه‌ی مرزی در انتگرال‌گیری شرکت داشته باشند. برای این منظور چندجمله‌ای $q(x) = p_{N+۱}(\xi) + cp_N(\xi) + dp_{N-۱}(\xi)$ را در نظر می‌گیریم که در آن c و d به نحوی انتخاب می‌شوند که $q(a) = q(b) = ۰$.

قضیه ۳.۳.۲. (انتگرال‌گیری گاوس-لوباتو). اعداد مثبت $\lambda_n, \lambda_{n-۱}, ..., \lambda_۱, \lambda_۰$ وجود دارند به‌طوری که برای هر چندجمله‌ای $f(\xi) \in P_{۲N-۱}$،

$$\int_a^b f(\xi)\rho(\xi)d\xi = \sum_{j=۰}^{N} \lambda_j f(\xi), \qquad (۱۵.۲)$$

که ξ_jها ریشه‌های چندجمله‌ای متعامد $q(\xi)$ تعریف شده در بالا هستند.

برهان. صفحه‌ی ۷۲[۵۶]. □

همان‌طور که می‌دانیم تقریباً می‌توان هر تابع هموار $\rho(\xi)$ را انتخاب، وارد ضرب داخلی انتگرال کرد و سپس متعامدسازی گرام-اشمیت را برای $\ldots ,۱,\xi,\xi^{۲}$ به‌کار برد تا مجموعه‌ی نامتناهی از چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به وزن $\rho(\xi)$ ساخت. چندجمله‌ای‌های مشهور چبیشف، لژاندر، هرمیت و لاگر با همین روش و از طریق انتخاب وزن‌ها و بازه‌های مختلف ساخته می‌شوند.

نظریه‌ی عمومی چندجمله‌ای‌های متعامد نشان می‌دهد که عضو $(N+۲)$ام خانواده‌ی چندجمله‌ای‌های متعامد هموار از درجه $N+۱$ و دقیقاً $N+۱$ صفر حقیقی رون بازه‌ی متناظر دارد. ریشه‌های این چندجمله‌ای‌ها و وزن‌های λ_j برای Nهای مختلف و توابع وزن گوناگون در کتاب‌های زیادی آورده شده است؛ ضمن این‌که این صفرها و وزن‌ها را می‌توان به سادگی از طریق برنامه‌های کامپیوتری نیز محاسبه کرد[۵۷].

برای چندجمله‌ای‌های لاگر با تابع وزن $w_\alpha = x^\alpha e^{-\alpha}$ و توابع لاگر با تابع وزن x^α، گره‌ها و وزن‌های مربع‌سازی زیر را داریم:

چندجمله‌ای لاگر-گاوس ξ_jها، ریشه‌های چندجمله‌ای $L_{N+۱}^{\alpha}(\xi)$ می‌باشند. یک روش برای تقریب ریشه‌های $L_{N+۱}^{\alpha}$ به صورت زیر می‌باشد[۵۸، ۵۹]:

$$y_k - \sin y_k = ۲\pi \frac{N-k+\frac{۳}{۴}}{۲N+\alpha+۱}, \quad k = ۱,...,N, \tag{۱۶.۲}$$

سپس z_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$z_k = [\cos(\frac{۱}{۲} y_k)]^{۲}, \quad k = ۱,...,N, \tag{۱۷.۲}$$

و سرانجام ریشه‌های گوسی به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\xi_j = ۲(۲N+\alpha+۱)z_k + -\frac{۱}{۶(۲N+\alpha+۱)[\frac{۵}{۴(۱+z_k)^{۲}} - \frac{۱}{۱-z_k} - ۱ + ۳\alpha^{۳}]},$$

وزن‌ها عبارتند از:

$$\lambda_j = \frac{\Gamma(\alpha+N)}{N!}(L_N^{\alpha}(x_j)\frac{d}{dx}L_{N-۱}^{\alpha}(x_j))^{-۱}, \quad j = ۰,۱,...,N. \tag{۱۸.۲}$$

چندجمله‌ای گاوس-رادو ξ_jها، ریشه‌های چندجمله‌ای $L_{N+۱}^{\alpha}(x_j) - \frac{N+\alpha+۱}{N+۱}L_N^{\alpha}(x_j)$ می‌باشند. وزن‌ها عبارتند از:

$$\lambda_۰ = \frac{(\alpha+۱)\Gamma^{۲}(\alpha+۱)(N-۱)!}{\Gamma(N+\alpha+۱)}, \tag{۱۹.۲}$$
$$\lambda_j = \frac{\Gamma(\alpha+N)}{N!}(L_N^{\alpha}(x_j)\frac{d}{dx}L_{N-۱}^{\alpha}(x_j))^{-۱}, \quad j = ۱,۱,...,N.$$

فصل ۳

چندجمله‌ای‌ها و توابع هرمیت

۱.۳ مقدمه

در ریاضیات چندجمله‌ای‌هاي هرمیت به یك دنباله از چندجمله‌ای‌هاي متعامد کلاسیك گفته مي‌شود که در احتمالات به‌وجود مي‌آیند، مثالی از آن سری‌های اج‌وورث است. آن‌ها همچنین در تئوری سیستم‌ها در ارتباط با عملیات غیرخطی روی نویز گاوسی استفاده می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها پس از چارلز هرمیت (۱۸۶۴) به این اسم مشهور شدند، اگرچه قبلاً توسط لاپلاس (۱۸۱۰) و چبیشف (۱۸۵۹) مطالعه شده بودند. چندجمله‌ای‌های هرمیت با $H_n(x)$ نمایش داده می‌شوند، که $n \geq ۰$ و $x \in R = (-\infty, +\infty)$.
در این بخش به بیان چندجمله‌ای‌ها و توابع هرمیت و خواص آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۳ چندجمله‌ای‌های هرمیت و خواص آن‌ها

معادله‌ی زیر را معادله‌ی هرمیت می‌نامیم:

$$y'' - ۲xy' + ۲xy = ۰. \tag{۱.۳}$$

در کاربردها نیاز به جوابی داریم که برای کلیه‌ی مقادیر متناهی x، متناهی باشد و علاوه‌بر آن، وقتی $x \to ۰$ آن‌گاه داشته باشیم $y(x)e^{x^۲/۲} \to ۰$. جواب استاندارد معادله‌ی (۱.۳) را با $H_n(x)$ نشان می‌دهند و به آن چندجمله‌ای هرمیت مرتبه‌ی n می‌گویند:

$$H_n(x) = a_n \sum_{k=۰}^{[n/۲]} (-۱)^k \frac{n!}{k!(n-۲k)!}(۲x)^{n-۲k}, \tag{۲.۳}$$

به طوري که [] نشانه‌ی جزء صحیح است و $a_k = -\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲(n-k)!}(۲x)^{n-۲k}$.

قضیه ۱.۲.۳. اگر t و x اعدادی حقیقی باشند، آن‌گاه می‌توان $e^{۲tx-t^۲}$ را به صورت زیر نوشت:

$$e^{۲tx-t^۲} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \tag{۳.۳}$$

حال می‌توان شکل کلی زیر را برای چندجمله‌ای‌های هرمیت در نظر گرفت:

قضیه ۲.۲.۳. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} H_n(x) = 2^n \{\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\} x^n, \tag{۴.۳}$$

که در آن عملگر exp به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\exp(\frac{d}{dx}) f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} . \frac{d^K}{dx^k}. \tag{۵.۳}$$

حال با توجه به دو شکل کلی که برای چندجمله‌ای‌های هرمیت در قضیه‌ی قبل بیان کردیم می‌توانیم تعدادی از این چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}
&H_0(x) = 1 \\
&H_1(x) = 2x \\
&H_2(x) = 4x^2 - 2 \\
&H_3(x) = 8x^3 - 12x \\
&H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \\
&H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \\
&H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\
&H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

نمودار چندجمله‌ای‌های هرمیت به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ را می‌توانید در شکل (۲.۳) مشاهده کنید.

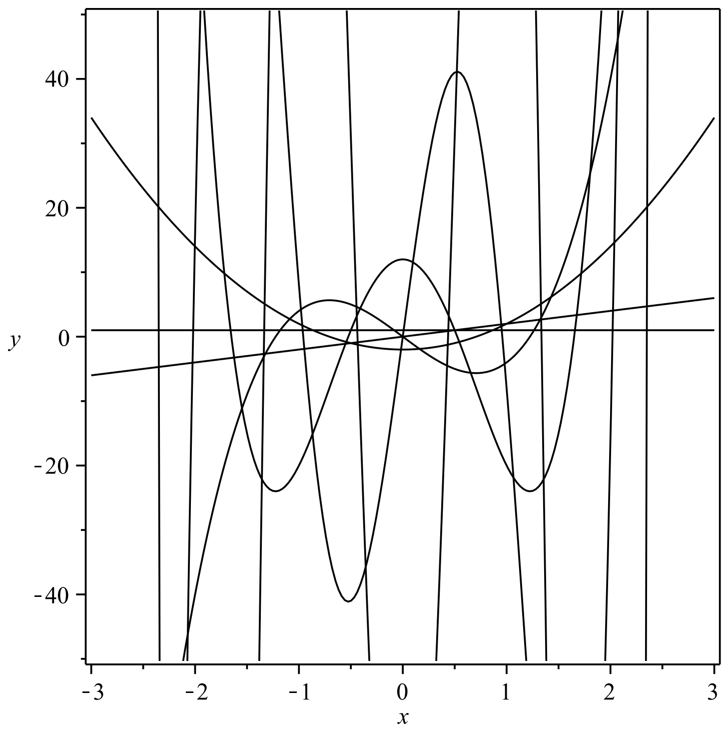
۱.۲.۳ مقادیر چندجمله‌ای‌های هرمیت

قضیه ۳.۲.۳. اگر n و m دو عدد صحیح غیر منفی باشند، آن‌گاه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \sqrt{x} \delta_{mn}, \tag{۶.۳}$$

که در آن

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{۷.۳}$$



شکل ۱.۳: چندجمله‌ای‌های هرمیت: $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$

قضیه‌ی فوق تعامد چندجمله‌ای‌های هرمیت را نشان می‌دهد و می‌توان به صورت کلی نتیجه گرفت که تابع زیر با وزن $e^{-x^{۲}}$ متعامد است:

$$H_n(x) \in L^{۲}(-\infty, +\infty). \qquad (۸.۳)$$

از خواص چندجمله‌ای‌های هرمیت می‌توان به روابط بازگشتی آن‌ها اشاره کرد. رابطه‌ی بازگشتی سه-عبارتی زیر چندجمله‌ای‌های هرمیت را تولید می‌کند:

$$H_{n+۱}(x) = ۲xH_n(x) - ۲nH_{n-۱}(x), \quad n \geq ۱ \qquad (۹.۳)$$
$$H_{۰}(x) = ۱, H_{۱}(x) = ۲x.$$

آن‌ها با توجه به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x^{۲}}$ متعامد هستند، به این ترتیب که:

$$\int_R H_m(x)H_n(x)e^{-x^{۲}}dx = \gamma_n\delta_{mn}, \quad \gamma_n = \sqrt{\pi}۲^n n!. \qquad (۱۰.۳)$$

در زیر برخی از خواص چندجمله‌ای‌های هرمیت را می‌بینیم.

۱) چندجمله‌ای‌های هرمیت تابع ویژه‌ی معادله‌ی اشتروم-لیوویل است:

$$e^{x^{۲}}(e^{-x^{۲}}H_n'(x))' + ۲nH_n(x) = ۰. \qquad (۱۱.۳)$$

۲) روابط مشتق زیر در چندجمله‌ای‌های هرمیت برقرار هستند:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \tag{۱۲.۳}$$

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x), \quad n \geq 0. \tag{۱۳.۳}$$

۳) با توجه به معادله‌های (۱۰.۳) و (۱۲.۳) داریم:

$$\int_R H'_m(x)H'_n(x)\omega(x)dx = 4n^2\gamma_{n-1}\delta_{mn}. \tag{۱۴.۳}$$

۴) ضریب مقدم $H_n(x)$ برابر $k_n = 2^n$ است.

۵) خاصیت تقارن‌های زوج-فرد آن‌ها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &H_{2n}(-x) = H_{2n}(x), \quad H_{2n+1}(-x) = -H_{2n+1}(x),\\ &H_{2n}(0) = (-1)^n((2n)!)/n!, \quad H_{2n+1}(0) = 0. \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

استفاده از چندجمله‌ای‌های هرمیت برای حل مسائل در فاصله‌ی نیمه‌متناهی با مشکالاتی مواجه است. به عنوان مثال برای معادلات دیفرانسیل که دارای شرط مرزی بی‌نهایت است با مشکل مواجه می‌شود. برای همین روش هم‌مکانی مبتنی بر توابع هرمیت برای رفع این نقیصه به‌کار گرفته شد که به راحتی قابل پیاده‌سازی است.

۲.۲.۳ معادله‌ی وبر-هرمیت

معادله‌ی زیر را معادله‌ی وبر-هرمیت مي‌ناميم:

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0. \tag{۱۶.۳}$$

این معادله دارای ارتباط نزدیکی با معادله‌ی هرمیت است. با اعمال تغییر متغیر $y = ze^{-x^2/2}$ معادله‌ی فوق به صورت زیر به‌دست مي‌آيد:

$$z'' - 2xz' + (\Lambda - 1)z = 0. \tag{۱۷.۳}$$

این معادله همان معادله‌ی هرمیت از مرتبه‌ی n است، به طوری که $2n = \Lambda - 1$ است. بنابراین مانند قبل دنبال جوابی هستیم که برای همه‌ی مقادیر x، متناهی باشد و زمانی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، سریع‌تر از $e^{x^2}/2$ نباشد. همچنین $(\Lambda - 1)/2$ باید یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت با قراردادن $n = (\Lambda - 1)/2$ قالب معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\overline{H}_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x), \tag{۱۸.۳}$$

که در آن $H_n(x)$ را تابع وبر-هرمیت مرتبه‌ی n می‌نامیم. حال مي‌يتوانيم توابع هرمیت را براي سادگی کار و نرمال کردن به صورتی که در بخش بعدی بیان شده است تعریف و خواص آن را بیان کنیم.

۳.۳ توابع هرمیت و خواص آن‌ها

همان طور که در شکل (۲.۳) مشاهده کردید، چندجمله‌ای‌های هرمیت در بی‌نهایت رفتار مجانبی آشفته‌ای دارند، در نتیجه برای به‌کارگیری مناسب نیستند[۶۱]. از این رو توابع هرمیت را به‌کار خواهیم گرفت. توابع هرمیت استاندارد از درجه n به‌صورت زیر تعریف می‌شوند[۶۲]:

$$\widetilde{H}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n \geq 0, x \in \mathcal{R}. \tag{۱۹.۳}$$

مشخص است که $\{\widetilde{H}_n\}$ یک سیستم متعامد در $L^2(\mathcal{R})$ می‌باشد، یعنی،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{H}_n(x)\widetilde{H}_m(x)dx = \sqrt{\pi}\delta_{mn}, \tag{۲۰.۳}$$

که δ تابع دلتا کرونکر است.

بر خلاف چندجمله‌ای‌های هرمیت، توابع هرمیت به دلیل داشتن خاصیت نزولی، خوش‌رفتار هستند:

$$|\widetilde{H}_n(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{as} \quad |x| \longrightarrow \infty, \tag{۲۱.۳}$$

و فرمول مجانب آن‌ها با n بزرگ به‌صورت زیر است:

$$\widetilde{H}_n(x) \sim n^{-\frac{1}{4}} \cos(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}). \tag{۲۲.۳}$$

شکل (۳.۳) رفتار توابع هرمیت را نشان می‌دهند.

از مهمترین خواص توابع هرمیت می‌توان به رابطه‌ی بازگشتی سه-عبارتی زیر اشاره کرد که می‌توان به‌وسیله‌ی آن این توابع را ساخت:

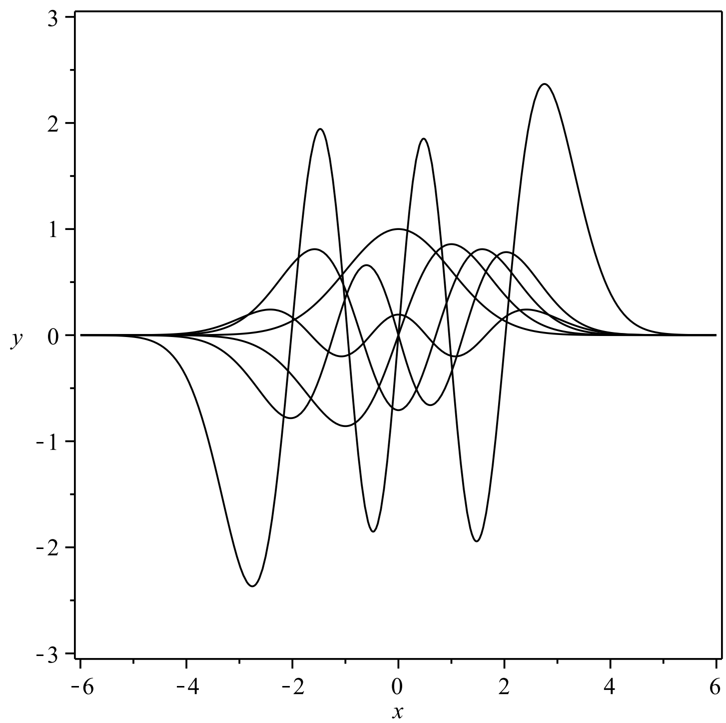
$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{n+1}(x) = x\sqrt{\frac{2}{n+1}}\widetilde{H}_n(x) - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\widetilde{H}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \\ \widetilde{H}_0(x) = e^{-x^2/2}, \quad \widetilde{H}_1(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2/2}. \end{aligned} \tag{۲۳.۳}$$

با استفاده از رابطه بازگشتی چندجمله‌ای‌های هرمیت و فرمول بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}'_n(x) &= \sqrt{2n}\widetilde{H}_{n-1}(x) - x\widetilde{H}_n(x) \\ &= \sqrt{\frac{n}{2}}\widetilde{H}_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\widetilde{H}_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

و این ایجاب می‌کند که:

$$\int_{\mathcal{R}} \widetilde{H}'_n(x)\widetilde{H}'_m(x)dx = \begin{cases} -\frac{\sqrt{n(n-1)\pi}}{2}, & m = n-2, \\ \sqrt{\pi}(n+\frac{1}{2}), & m = n, \\ -\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)\pi}}{2}, & m = n+2, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$



شکل ۲.۳: توابع هرمیت: $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$

درمقابل چندجمله‌ای‌های هرمیت، توابع هرمیت نرمال شده‌ی خوش‌رفتارتر می‌باشند زمانی‌که:

$$\widetilde{P}_N := \{u : u = e^{-x^۲/۲}v, \forall v \in P_N\}. \qquad (۲۵.۳)$$

به‌طوری که P_N مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌های هرمیت از درجه‌ی حداکثر N می‌باشد.

اکنون مربع سازی گوسی در حالتی که از توابع هرمیت استفاده شده است را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید $\{x_j\}_{j=۰}^{N}$ نقاط گاوس-هرمیت باشند، و وزن‌ها را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\widetilde{w}_j = \frac{\sqrt{\pi}}{(N+۱)\widetilde{H}_N^۲(x_j)}, \quad ۰ \le j \le N. \qquad (۲۶.۳)$$

سپس داریم:

$$\int_{\mathcal{R}} p(x)dx = \sum_{j=۰}^{N} p(x_j)\widetilde{w}_j, \quad \forall p \in \widetilde{P}_{۲N+۱}. \qquad (۲۷.۳)$$

۱.۳.۳ تبدیل توابع هرمیت

معادلاتی که با استفاده از توابع هرمیت به حل آن‌ها پرداخته‌ایم، بر روي بازه‌ی $(۰, +\infty)$ تعریف شده‌اند. اما همان‌طور که می‌دانیم، خواص توابع هرمیت، در نوار نامتناهی D_S از ω-صفحه‌ی مختلط

مشتق شده است که براي $d > ۰$ داریم

$$D_S = \{\omega = t + is : |s| < d \leq \frac{\pi}{۲}\}, \quad (۲۸.۳)$$

تقریب‌ها می‌توانند برای بازه‌های بی‌نهایت، نیمه‌بینهایت و محدود ساخته شوند. یکی از راه‌کارها برای ساختن تقریب‌ها در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ ، که در این پایان‌نامه نیز از آن استفاده مي‌شود، تغییر متغیر است. برای مثال می‌توان تغییر متغییرهای زیر را ذکر کرد:

$$w = \phi(z) = \ln(\sinh(kz)) \quad (۲۹.۳)$$

و

$$w = \phi(z) = \frac{۱}{k}\ln(z) \quad (۳۰.۳)$$

که k یك ثابت است.

توابع پایه‌ی گرفته شده در $(۰, +\infty)$ ترکیبی از توابع هرمیت تبدیل شده هستند

$$\widehat{H}_n(x) \equiv \widetilde{H}_n(x) \circ \phi(x) = \widetilde{H}_n(\phi(x)). \quad (۳۱.۳)$$

که $\widetilde{H}_n(x) \circ \phi(x)$ به‌صورت $\widetilde{H}_n(x)(\phi(x))$ تعریف شده است. معکوس تبدیل $\omega = \phi(z)$ براي معادلات (۲۹.۳) و (۳۰.۳) به ترتیب به‌صورت زیر هستند

$$z = \phi^{-۱}(\omega) = \frac{۱}{k}\ln(e^{\omega} + \sqrt{e^{۲\omega} + ۱}). \quad (۳۲.۳)$$

$$z = \phi^{-۱}(\omega) = e^{k\omega}. \quad (۳۳.۳)$$

بنابراین، تصویر معکوس نقاط فضای $\{x_j\}_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty}$ را به‌صورت زیر داریم

$$\Gamma = \{\phi^{-۱}(t) \in D_E : -\infty < t < +\infty\} = (۰, +\infty) \quad (۳۴.۳)$$

و نیز به ترتیب متناظر با معادلات (۲۹.۳) و (۳۰.۳) داریم

$$\tilde{x}_j = \phi^{-۱}(x_j) = \frac{۱}{k}\ln(e^{x_j} + \sqrt{e^{۲x_j} + ۱}), \quad j = ۰, \pm۱, \pm۲, ... \quad (۳۵.۳)$$

و

$$\tilde{x}_j = \phi^{-۱}(x_j) = e^{kx_j}, \quad j = ۰, ۱, ۲, ... \quad (۳۶.۳)$$

اگر $w(x)$ یك تابع غیرمنفی، انتگرال‌پذیر، با مقادیر حقیقي در بازهی Γ باشد، تعریف می‌کنیم

$$L^{۲}_w(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \mathbb{R} \mid v \text{ is measurable and } \| v\|_w < \infty\}, \quad (۳۷.۳)$$

که در آن

$$\| v\|_w = \left(\int_۰^\infty \mid v(x) \mid^۲ w(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{۱}{۲}}, \tag{۳۸.۳}$$

نرم حاصل از ضرب داخلی فضای $L_w^۲(\Gamma)$ می‌باشد،

$$< u, v >_w= \int_۰^\infty u(x)v(x)w(x)\mathrm{d}x. \tag{۳۹.۳}$$

بنابراین $\{\widehat{H}_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ یك سیستم را بیان می‌کند که بر طبق معادله‌ی (۳۹.۳) متقابلاً متعامد است. یعنی،

$$< \widehat{H}_n(x), \widehat{H}_m(x) >_{w(x)}= \sqrt{\pi}\delta_{nm}, \tag{۴۰.۳}$$

، که در حالت (۲۹.۳) $w(x) = \coth(x)$ و در حالت (۳۰.۳) $w(x) = ۱/x$، و نیز δ_{nm} تابع دلتا کرونکر است. این سیستم در $L_w^۲(\Gamma)$ کامل است. برای هر تابع $f \in L_w^۲(\Gamma)$ عبارات زیر برقرار است:

$$f(x) \cong \sum_{k=-N}^{+N} f_k\widehat{H}_k(x), \tag{۴۱.۳}$$

$$\int_۰^\infty f(x) \cong \sum_{k=-N}^{+N} \frac{f_k}{\phi'(x)}, \tag{۴۲.۳}$$

با

$$f_k = \frac{< f(x), \widehat{H}_k(x) >_{w(x)}}{\| \widehat{H}_k(x)\|_{w(x)}^۲}. \tag{۴۳.۳}$$

حال می‌توان یك تبدیل متعامد بر اساس توابع هرمیت تبدیل‌یافته، به صورت زیر تعریف کرد:

قرار دهید

$$\widehat{\mathcal{H}}_N = span\{\widehat{H}_۰(x), \widehat{H}_۱(x), ..., \widehat{H}_n(x)\} \tag{۴۴.۳}$$

تبدیل $L^۲(\Gamma)$-متعامد $\tilde{\xi}_N : L^۲(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_N$، تبدیلی است که براي هر $y \in L^۲(\Gamma)$ داریم

$$(\hat{\xi}_N y - y, \phi) = ۰, \quad \forall \in \widehat{\mathcal{H}}_N \tag{۴۵.۳}$$

یا به‌طور معادل

$$\hat{\xi}_N y(x) = \sum_{i=۰}^{N} \hat{a}_i\widehat{H}_i(x). \tag{۴۶.۳}$$

فصل ۴

توابع سینک

۱.۴ مقدمه

توابع سینک، توابعی متعامد در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ است که قدرت آن‌ها در تقریب توابع مجهول در معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی همگرایی نمایی است.

در این فصل به معرفی توابع سینک می‌پردازیم و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۴ توابع سینک

تابع سینک به صورت زیر تعریف می‌شود[۶۳]:

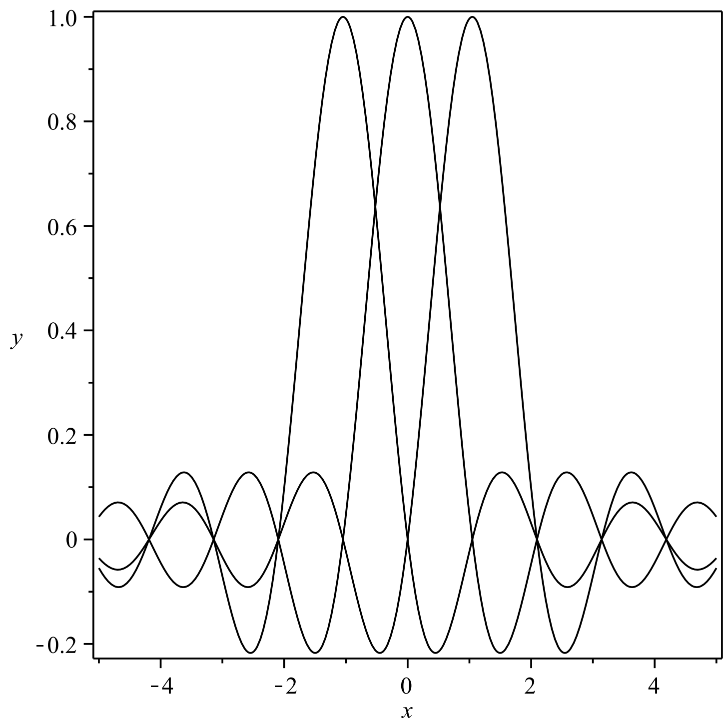
$$Sinc(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

با فرض $x \neq 0$ می‌توان توابع سینک را به‌صورت انتگرال مختلط همانند زیر تعریف کرد:

$$Sinc(x) = \frac{Sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{1}{\pi x}\frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} = \frac{1}{2i\pi x}[e^{itx}]_{t=-\pi}^{t=+\pi} = \frac{1}{2\pi}\int -\pi^{+\pi} e^{itx} dt.$$

kامین انتقال تابع سینک، با طول گام h به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_k(h,x) \equiv Sinc(\frac{x-kh}{h}) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{h}(x-kh))}{\pi h(x-kh)}, & x \neq kh, \\ 1, & x = kh. \end{cases}$$



شکل ۱.۴: توابع سینک: $h = \frac{\pi}{۲}$ و $k = -۱, ۰, ۱$

همچنین توابع سینک در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ متعامد است:

$$S_k(h, jh) = \delta_{kj} = \begin{cases} ۱, & j = k, \\ ۰, & j \neq k. \end{cases}$$

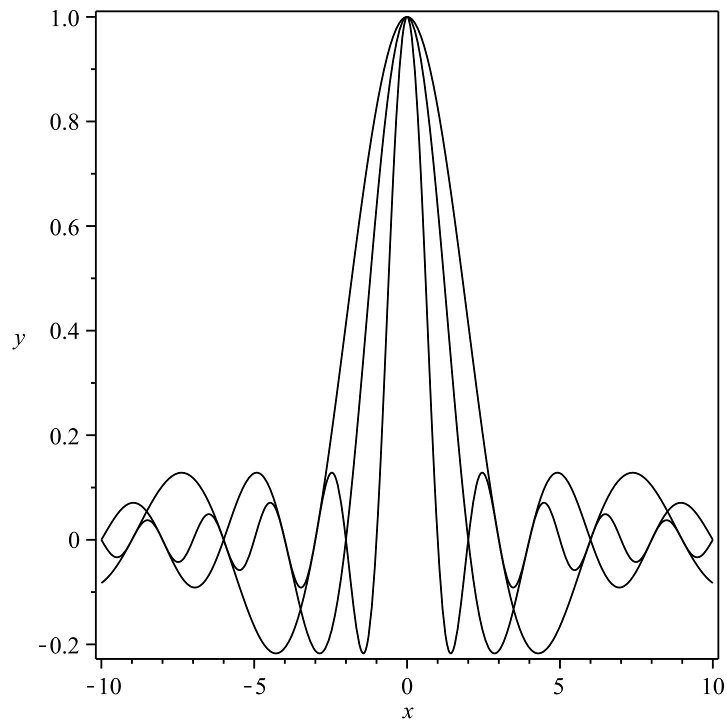
اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده باشد، آن‌گاه سری

$$C(f, h)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) Sinc(\frac{x - kh}{h}), \quad h \succ ۰, \qquad (۱.۴)$$

را در صورت همگرا بودن، بست کاردینال ویتکر تابع f می‌نامیم، بسط کاردینال یک تابع به‌طور مفصل در [۶۴] بیان شده است. نمودار توابع سینک در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ به ازای طول گام ثابت و kهای متفاوت، در شکل (۲.۴) و نمودار توابع سینک در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ به ازای طول گام‌های متفاوت و k ثابت در شکل (۲.۴) نمایش داده شده است.

۳.۴ کاربرد توابع سینک در بازه‌ی $(۰, +\infty)$

توابع سینک به‌طور طبیعی در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده‌اند. حال اگر بخواهیم معادلات دیفرانسیل در بازه‌ی نامتناهی را حل کنیم، می‌توانیم این توابع را با نگاشت $ln(x)$ به بازه‌ی $(۰, +\infty)$ منتقل کنیم.



شکل ۲.۴: توابع سینک: $h = ۱, ۲, ۳$ و $k = ۰$

فرض کنید

$$D_E = \{z = x + iy :\mid arg(z) \mid < d \preceq \frac{\pi}{۲}\}, \qquad (۲.۴)$$

و

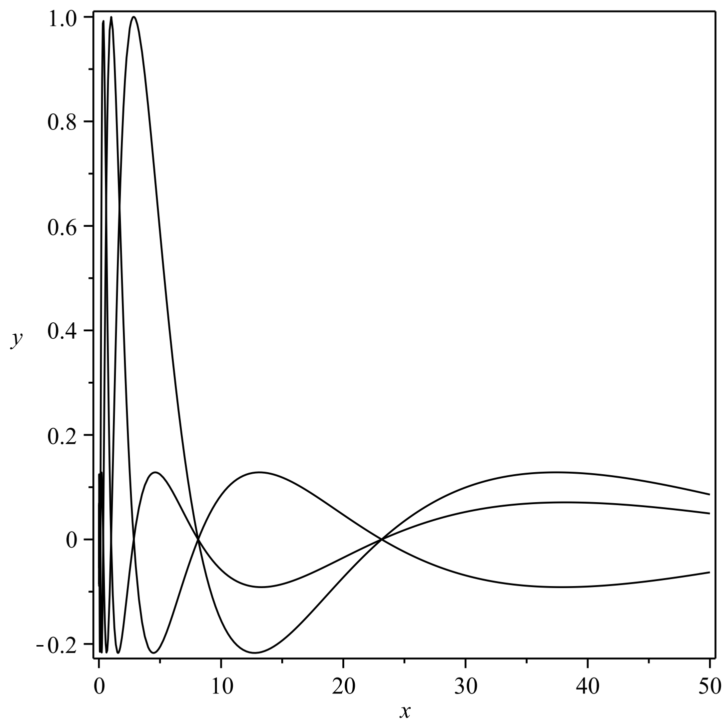
$$D_S = \{w = t + is :\mid s \mid < d \preceq \frac{\pi}{۲}\}, \qquad (۳.۴)$$

برای این‌که فضای D_E را که در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ است به فضای D_S که در بازه‌ی $(۰, +\infty)$ است منتقل کنیم، از نگاشت زیر استفاده می‌کنیم:

$$w = \phi(z) = ln(z). \qquad (۴.۴)$$

در این صورت توابع پایه‌ای سینک در بازه‌ی نیمه متناهی به‌صورت زیر است:

$$S_k(x) \equiv S(k,h)o\phi(x) = Sinc(\frac{\phi(x) - kh}{h}). \qquad (۵.۴)$$



شکل ۳.۴: توابع سینک: $h = \frac{\pi}{3}$ و $k = -1, 0, 1$

در معادله‌ی (۲۵.۵) منظور از $S(k,h)o\phi(x)$، تابع $S(k,h)(\phi(x))$ است.

نگاشت معکوس $w = \phi(x)$ به‌صورت $z = \phi^{-1}(w) = e^w$ است ، بنابراین اگر بازه‌ی $(0, +\infty)$ را با Γ نشان دهیم، داریم:

$$\Gamma = \{\phi^{-1}(t) \in D_E : -\infty < t < +\infty\} = (0, +\infty), \tag{۶.۴}$$

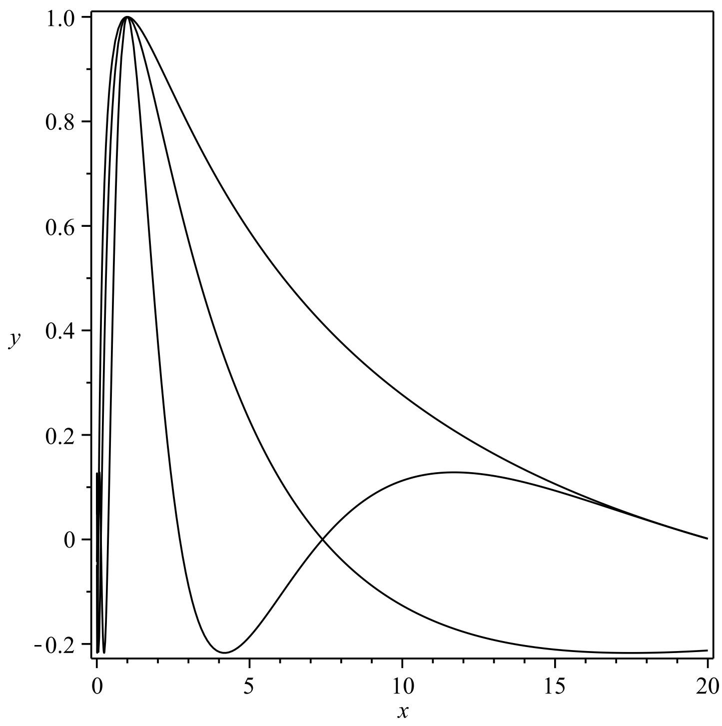
حال نقاط سینک در بازه‌ی $(0, +\infty)$ به‌صورت زیر است:

$$x_k = \phi^{-1}(kh) = e^{kh}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{۷.۴}$$

نمودار توابع سینک با نگاشت $ln(z)$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ به ازای طول گام ثابت و kهای متفاوت، در شکل (۳.۴) و نمودار توابع سینک در بازه‌ی $(0, +\infty)$ به ازای طول گام‌های متفاوت و k ثابت در شکل (۳.۴) نمایش داده شده است.

همچنین برای انتقال توابع سینک از بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ به بازه $(0, +\infty)$ می‌توانید از نگاشت زیر نیز استفاده کنید:

$$w = \phi(z) = ln(\sinh(z)), \tag{۸.۴}$$



شکل ۴.۴: توابع سینک: $h = ۱, ۲, ۳$ و $k = \circ$

با این نگاشت، D_S و D_E به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_S = \{w = t + is :|\, s \,|< d \preceq \frac{\pi}{۲}\},$$
$$D_E = \{z = x + iy :|\, arg(\sinh(z)) \,|< d \preceq \frac{\pi}{۲}\}. \quad (۹.۴)$$

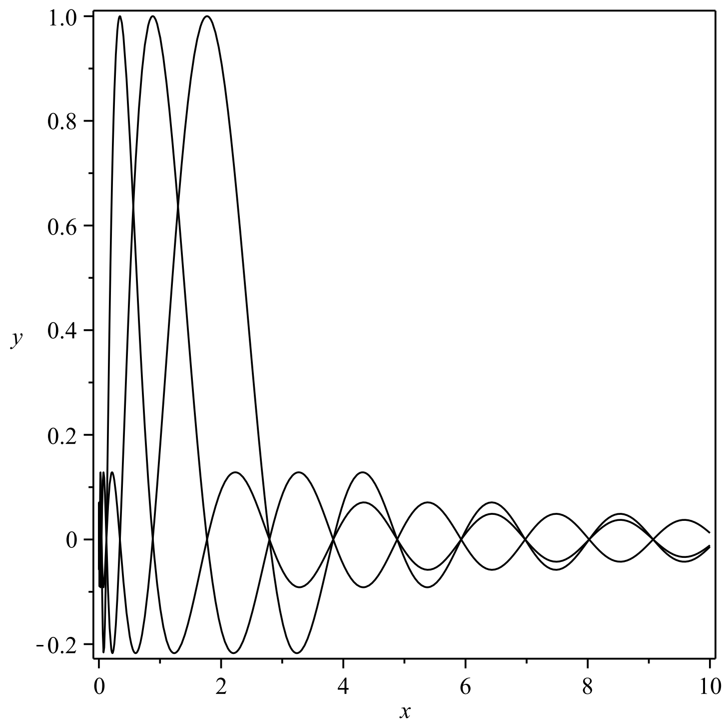
نگاشت معکوس $w = \phi(z)$ به‌صورت زیر است:

$$z = \phi^{-۱}(w) = ln(e^w + (e^{۲w} + ۱)^{\frac{۱}{۲}}). \quad (۱۰.۴)$$

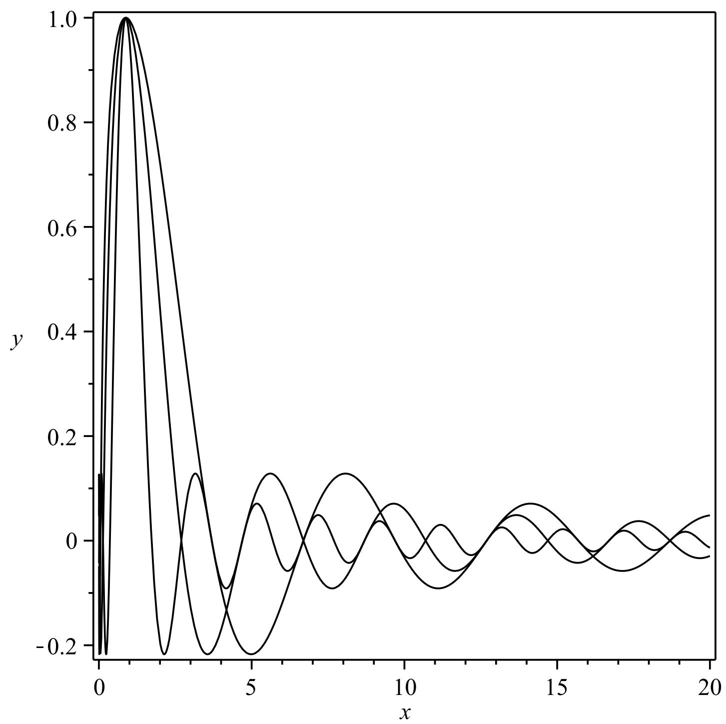
حال نقاط سینک در بازه‌ی $(\circ, +\infty)$ به‌صورت زیر خواهند بود:

$$x_k = \phi^{-۱}(kh) = ln(e^{kh} + (e^{۲kh} + ۱)^{\frac{۱}{۲}}), \quad k = \circ, \pm ۱, \pm ۲, ... \quad (۱۱.۴)$$

نمودار توابع سینک با نگاشت $ln(\sinh(z))$ در بازه‌ی $(\circ, +\infty)$ به ازای طول گام ثابت و kهای متفاوت، در شکل (۳.۴) و نمودار توابع سینک در بازه‌ی $(\circ, +\infty)$ به ازای طول گام‌های متفاوت و k ثابت در شکل (۳.۴) نمایش داده شده است.



شکل ۵.۴: توابع سینک: $h = \frac{\pi}{۳}$ و $k = -۱, ۰, ۱$



شکل ۶.۴: توابع سینک: $h = ۱, ۲, ۳$ و $k = ۰$

فرض کنید $w(x)$ تابعب نامنفی، حقیقی و انتگرال‌پذیر روی Γ باشد، حال تعریف می‌کنیم:

$$L_w^{۲}(\Gamma) = \{v : \Gamma \to \Re | v \ is \ measurable \ and \ \|v\| < \infty\}, \quad (۱۲.۴)$$

به‌طوری‌که

$$\|v\|_w = (\int_\circ^\infty |v(x)|^{۲} w(x) dx)^{\frac{۱}{۲}}, \quad (۱۳.۴)$$

نرم به‌دست آمده در فضای $L_w^{۲}(\Gamma)$ است.

اگر

$$< u, v >_w = \int_\circ^\infty u(x) v(x) w(x) dx, \quad (۱۴.۴)$$

آن‌گاه $\{S_k(x)\}_{k \in Z}$ با یک h ثابت، تشکیل یک مجموعه‌ی متعامد با شرایط زیر می‌دهند:

$$< S_{kn}(x), S_{km}(x) >_{w(x)} = h \delta_{nm}, \quad (۱۵.۴)$$

به‌طوری‌که $w(x) = \frac{۱}{x}$ و δ_{nm} تابع کرونکر می‌باشد، همچنین این مجموعه یک سیستم متعامد کامل در فضای $L_w^{۲}(\Gamma)$ است و در نتیجه هر تابع f را می‌توان به‌صورت

$$f(x) \cong \sum_{k=-N}^{+N} f_k S_k(x), \quad (۱۶.۴)$$

تخمین زد به‌طوری‌که

$$f_k = \frac{< f(x), S_k(x) >_{w(x)}}{\|S_k(x)\|_{w(x)}^{۲}}, \quad (۱۷.۴)$$

و

$$h = (\frac{۲\pi d}{\alpha N})^{\frac{۱}{۲}}, \quad (۱۸.۴)$$

که بسته به نوع رفتار f، d و $\circ < \alpha \leq ۱$ مشخص می‌شود[۶۵].

لازم به ذکر است مقادیر حدی توابع سینک با نگاشتهای ذکر شده در نقاط $x = \circ, +\infty$ برابر با صفر است و این در حل معادلات دیفرانسیل در بازه‌ی نیمه متناهی ما را یاری خواهد کرد[۶۶].

از دیگر نمونه نگاشت‌های دیگر برای حل مسائل در بازه‌های مختلف، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) نگاشت $\phi(z) = ln(\frac{z}{۱-z})$

از این نگاشت برای حل مسائل در بازه‌ی $(\circ, ۱)$ استفاده می‌شود.

$$D_S = \{w = t + is :| s |< d \preceq \frac{\pi}{۲}\},$$
$$D_E = \{z = x + iy :| arg(\frac{z}{۱ - z}) |< d \preceq \frac{\pi}{۲}\},$$
$$w = \phi(z) = ln(\frac{z}{۱ - z}),$$
$$z = \phi^{-۱}(w) = \frac{e^w}{۱ + e^w}, \quad (۱۹.۴)$$

۲) نگاشت $\phi(z) = ln(\frac{۱+z}{۱-z})$

از این نگاشت برای حل مسائل در بازه‌ی $(-۱, ۱)$ استفاده می‌شود.

$$D_S = \{w = t + is :| s |< d \preceq \frac{\pi}{۲}\},$$
$$D_E = \{z = x + iy :| arg(\frac{۱ + z}{۱ - z}) |< d \preceq \frac{\pi}{۲}\},$$
$$w = \phi(z) = ln(\frac{۱ + z}{۱ - z}),$$
$$z = \phi^{-۱}(w) = \tanh(\frac{w}{۲}). \quad (۲۰.۴)$$

۴.۴ مقادیر توابع سینک و مشتقات مراتب بالای آن‌ها در نقاط هم‌مکانی

مشتقات توابع سینک در نقاط هم‌مکانی x_k به‌صورت زیر است[۶۵]:

$$\delta^{(۰)}_{k,j} = [S(k, h)o\phi(x)] |_{x=x_j}= \begin{cases} ۱, & k = j, \\ ۰, & k \neq j, \end{cases} \quad (۲۱.۴)$$

$$\delta^{(۱)}_{k,j} = \frac{d}{d\phi}[S(k, h)o\phi(x)] |_{x=x_j}= \frac{۱}{h} \begin{cases} ۰, & k = j, \\ \frac{(-۱)^{j-k}}{j-k}, & k \neq j, \end{cases} \quad (۲۲.۴)$$

$$\delta^{(۲)}_{k,j} = \frac{d^۲}{d\phi^۲}[S(k, h)o\phi(x)] |_{x=x_j}= \frac{۱}{h^۲} \begin{cases} \frac{-\pi^۲}{۳}, & k = j, \\ \frac{-۲(-۱)^{j-k}}{(j-k)^۲}, & k \neq j, \end{cases} \quad (۲۳.۴)$$

$$\delta^{(۳)}_{k,j} = \frac{d^۳}{d\phi^۳}[S(k, h)o\phi(x)] |_{x=x_j}= \frac{۱}{h^۳} \begin{cases} ۰, & k = j, \\ \frac{(-۱)^{j-k}}{(j-k)^۳}[۶ - \pi^۲(j - k)^۲], & k \neq j, \end{cases} \quad (۲۴.۴)$$

$$\delta_{k,j}^{(۴)} = \frac{d^{۴}}{d\phi^{۴}}[S(k,h)o\phi(x)]\,|_{x=x_j} = \frac{\pi^{۲}}{۵}\begin{cases} ۰, & k = j, \\ \frac{-(-۱)^{j-k}}{(j-k)^{۴}}[۲۴ - \pi^{۲}(j-k)^{۲}], & k \neq j. \end{cases} \tag{۲۵.۴}$$

فصل ۵

کاربرد توابع لاگر، هرمیت و سینک در حل معادلات دیفرانسیل

۱.۵ مقدمه

در این فصل روش‌های مطرح شده در فصل‌های قبل را برای مسائل زیر مورد استفاده قرار می‌دهیم:

- مسئله جریان ثابت از یک سیال سه بعدی در یک فضای نیمه متخلخل؛
- مسئله توماس-فرمی؛
- مسئله انتقال گرما در یک سیال دارسین.

۲.۵ مسئله‌ی جریان ثابت از یک سیال سه بعدی در یک فضای نیمه متخلخل

سیالات غیر نیوتنی در چند دهه‌ی گذشته به دلیل ارتباطشان با برنامه‌ها و پروژه‌های صنعتی و طبیعی مورد توجه بسیاری از محققان و مهندسان قرار گرفته‌اند. موادی شبیه پلیمرها، مواد گداز، رسوب‌های حفاری، اجسام چند وجهی سخت و جامد، گریس‌ها و روغن‌های خالص و خیلی از اجسام دیگر جزء کلاسبندی سیالات غیرنیوتنی می‌باشند. سیالات دو بعدی و سه بعدی به طور موفقیت‌آمیزی مورد مطالعه‌ی محققان قرار گرفته‌اند. سیالات سه بعدی به‌طور مشخص برای جریانات ثابت مدل‌بندی شده‌اند. در این‌جا یک سیال سه بعدی برای جریان ثابتی در یک فضای نیمه متخلخل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. جریانات ویسکوالاستیک (کشدار و چسبناک) در یک فضای متخلخل اخیراً به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف مهندسی مانند بازیافت مواد روغنی، روکش‌های کاغذی و پارچه‌ای و پروسه‌های تولید مواد مخلوط مورد توجه قرار گرفته‌اند. همچنین مدل‌بندی‌هایی از جریانات پلیمری در فضای متخلخل

به‌طور مخصوصی روی شبیه‌سازی عددی از جریانات ویسکوالاستیک در یک مدل هندسی منفذدار به عنوان مثال لوله‌های باریک، لوله‌های مواج و غیره مورد توجه قرار گرفته‌اند.

اکنون به مدل‌بندی مسئله می‌پردازیم و مسئله‌ی مورد نظر را تبدیل به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دوم غیرخطی می‌کنیم. معادلاتی که منجر به جریانی از یک سیال تراکم‌ناپذیر در یک فضای متخلخل می‌شوند عبارتند از:

$$divV = 0 \; , \tag{۱.۵}$$

$$\rho(V.\nabla) = -\nabla p + divS + r \; , \tag{۲.۵}$$

در معادلات بالا V سرعت، ρ چگالی سیال، p فشار ایستایی، S تنسور فشار اضافی و r مقاومت و پایداری دارسی برای یک سیال سه بعدی در یک فضای متخلخل می‌باشند.
معادله‌ی تشکیل‌دهنده برای S در یک سیال سه بعدی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$S = \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 + \beta_1 A_3 + \beta_2(A_2 A_1 + A_1 A_2) + \beta_3(trA_1^2)A_1 \; , \tag{۳.۵}$$

در این‌جا μ چسبندگی پویا، $\{\alpha_i\}_{i=1}^{2}$ و $\{\beta_i\}_{i=1}^{3}$ به ترتیب ثابت‌های ماده برای تقریب‌های مرتبه‌ی ۲ و ۳ می‌باشند. تنسورهای جنبشی A_n به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_1 = \nabla V + (\nabla V)^T \; , \tag{۴.۵}$$

$$A_n = (\frac{\partial}{\partial t} + V.\nabla)A_{n-1} + A_{n-1}(\nabla V) + (\nabla V)^T A_{n-1}, \; n = 2, 3, ... \tag{۵.۵}$$

معادله‌ی (۳.۵) با ترمودینامیک سازگار است اگر

$$\mu \geq 0 \; ; \quad \alpha_1 \geq 0 \; ; \quad |\, \alpha_1 + \alpha_2 \,| \leq \sqrt{24\mu\beta_3} \; , \tag{۶.۵}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \; , \quad \beta_3 \geq 0 \; . \tag{۷.۵}$$

در این حالت معادله‌ی (۳.۵) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$S = [\mu + \beta_3(trA_1^2)]A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \; , \tag{۸.۵}$$

سیستم مختصاتی دکارتی XYZ با محور عمودی Y را در نظر بگیرید. در جریان‌های سیال سه بعدی تراکم‌ناپذیر در یک فضای متخلخل $y > 0$ و در یک سطح مسطح نامتناهی $y = 0$ می‌باشد. در یک رسانای متخلخل بیکران قانون دارسی برای جریانات سیال چسبناک سرعت پایین برقرار می‌باشد. این قانون مربوط به افت فشار ناشی از کشش و سرعت اصطکاکی و چشم‌پوشی از اثرات مرزی روی جریان می‌باشد. بر طبق این قانون افت فشار با سرعت به‌طور مستقیم متناسب است. برای محیط متخلخل با یک سری مرزها، برینکمن یک معادله برای توصیف جریان متوسط محلی پیشنهاد داده است. اگرچه معادله‌ی پیشنهاد شده به‌وسیله برینکمن برای جریانات چسبناک ثابت برقرار است ولی در چندین دست‌نوشته قانون اصلاحی دارسی برای جریانات چسبناک در یک محیط متخلخل پیشنهاد شده است. براساس معادله‌ی

تشکیل دهنده اولدروید قانون زیر برای توصیف پدیده‌های تأخیری آرمیده در یک محیط متخلخل بی‌کران حدس زده شده است:

$$(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})\nabla p = -\frac{\mu\phi}{k}(1+\lambda_r\frac{\partial}{\partial t})V\ , \tag{۹.۵}$$

این‌جا k نفوذپذیری، λ و λ_r به ترتیب ضرایب زمانی تأخیری و آرمیدگی و ϕ تخلخل در محیط متخلخل می‌باشند. توجه شود که برای $\lambda = \lambda_r = 0$ معادله‌ی (۹.۵) تبدیل به معادله‌ی دارسی شناخته شده در سیالات چسبناک می‌شود. در مقایسه با رابطه تشکیل دهنده‌ی ماکسول مدل زیر را خواهیم داشت:

$$(1+\lambda\frac{\partial}{\partial t})\nabla p = -\frac{\mu\phi}{k}V\ , \tag{۱۰.۵}$$

برای جریان تک سویه از سیالات دو بعدی معادله‌ی تشکیل دهنده اولدروید با گرفتن $k = 0$ به‌دست می‌آید. بنابراین در یک محیط متخلخل رابطه‌ی بین ∇p و V برای جریان تک سویه در یک سیال دو بعدی می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$(\nabla p)_x = -\frac{\mu\phi}{k}(1+\lambda_r\frac{\partial}{\partial t})u\ , \tag{۱۱.۵}$$

که در این‌جا داریم:

$$\mu\lambda_r = \alpha_1\ , \tag{۱۲.۵}$$

به‌طور مشابه برای معادلات (۹.۵)، (۱۰.۵)، (۱۱.۵) ، رابطه‌ی تشکیل دهنده بین افت فشار و سرعت برای جریان تک سویه از یک سیال سه بعدی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\nabla p)_x = -\frac{\phi u}{k}(\mu+\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}+2\beta_3(\frac{\partial u}{\partial y})^2)\ , \tag{۱۳.۵}$$

جهت فشار در معادله‌ی بالا می‌تواند به عنوان یک فشار از پایداری برای جریان در حجمی از محیط متخلخل تفسیر شود. همچنین r_x اندازه‌ای از پایداری جریان ارائه شده به‌وسیله ماتریس جامد می‌باشد. بنابراین r_x می‌تواند به‌صورت زیر مشخص شود:

$$r_x = -\frac{\phi u}{k}(\mu+\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}+2\beta_3(\frac{\partial u}{\partial y})^2)\ , \tag{۱۴.۵}$$

با جایگذاری معادلات (۴.۵)، (۵.۵)، (۳.۵)، (۱۴.۵) در معادله‌ی (۲.۵) و حذف ∇p در جهت x به معادله‌ی حالت ثابت زیر می‌رسیم:

$$0 = \frac{\mu}{\rho}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{6\beta_3}{\rho}(\frac{du}{dy})^2\frac{d^2u}{dy^2} - \left(\mu + 2\beta_3(\frac{du}{dy})^2\right)\frac{\phi u}{\rho k}\ , \tag{۱۵.۵}$$

شرایط اولیه و مرزی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$u(0) = V_0, \quad u(y)\to 0 \quad as \quad y\to\infty\ , \tag{۱۶.۵}$$

معادله‌ی (۱۵.۵) می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$0 = \mu^\star \frac{d^2u}{dy^2} + b_1^\star (\frac{du}{dy})^2 \frac{d^2u}{dy^2} - b_2^\star (\frac{du}{dy})^2 u - \phi_1 u \, , \tag{۱۷.۵}$$

که در این‌جا داریم:

$$\mu^\star = \frac{\mu}{\rho + \alpha_1 \phi/k} \, , \quad b_2^\star = \frac{2\beta_3 \phi/k}{\rho + \alpha_1 \phi/k} \, , \tag{۱۸.۵}$$

$$b_1^\star = \frac{6\beta_3}{\rho + \alpha_1 \phi/k} \, , \quad \phi_1 = \frac{\mu\phi/k}{\rho + \alpha_1 \phi/k} \, , \tag{۱۹.۵}$$

با معرفی متغییرهای غیر بعدی زیر

$$z = \frac{V_0}{\nu} y \, , \quad f = \frac{u}{V_0} \, , \tag{۲۰.۵}$$

داریم:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + b_1 (\frac{df}{dz})^2 \frac{d^2 f}{dz^2} - b_2 f (\frac{df}{dz})^2 - b_3 f = 0 \, , \tag{۲۱.۵}$$

$$f(0) = 1 \, , \quad f(\infty) = 0 \, , \tag{۲۲.۵}$$

که در این‌جا داریم:

$$b_1 = \frac{b_1^\star V_0^4}{\mu^\star \nu^2} \, , \quad b_2 = \frac{b_2^\star V_0^2}{\mu^\star} \, , \tag{۲۳.۵}$$

$$b_3 = \frac{\phi_1 \nu^2}{\mu^\star V_0^2} \, , \tag{۲۴.۵}$$

در این مسئله $f'(0)$ برای ما اهمیت دارد.

در ادامه ما این مسئله را با توابع لاگر، هرمیت و سینک از طریق روش هم‌مکانی حل خواهیم کرد و با روش عددی که در مقاله‌ی [۶۷] ارائه شده است، مقایسه خواهیم کرد.

۱.۲.۵ حل مسئله‌ی جریان ثابت از یک سیال سه بعدی در یک فضای نیمه متخلخل با توابع لاگر

در ابتدای کار، $f(z)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$I_N f(z) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(z), \tag{۲۵.۵}$$

حال برای یافتن ضرایب مجهول a_jها، معادله‌ی (۲۵.۵) را در معادله‌ی (۲۱.۵) و شرایط مرزی (۵ .۲۲) جایگذاری می‌کنیم و تابع باقیمانده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Rez(z) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi''_j(z) + b_1 (\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi'_j(z))^2 \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi''_j(z) \tag{۲۶.۵}$$
$$-b_2 \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(z) (\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi'_j(z))^2 - b_3 \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(z) = 0,$$

با شرایط مرزی:

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(0) = 1, \tag{۲۷.۵}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(\infty) = 0. \tag{۲۸.۵}$$

با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع اصلاح‌شده‌ی لاگر می‌باشند در معادله‌ی (۵.۲۶) ، N معادله تشکیل می‌شود که به همراه شرط مرزی ذکر شده در معادله‌ی (۲۷.۵)، $N+1$ معادله خواهیم داشت که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب a_j را پیدا کنیم. این مسئله توسط احمد [۶۷] و حیات و دیگران [۶۸] در دو مقاله‌ی مجزا با انتخاب پارامترهای $b_1 = 0/6$ و $b_2 = 0/1$ و $b_3 = 0/5$ حل شده است. احمد [۶۷] با استفاده از روش شوتینگ، مقدار $f'(0) = -0/678301$ را بدست آورده است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع لاگر اصلاح‌شده حل کرده‌ایم [۶۹] و نتایج را با نتایج به‌دست آمده توسط احمد در جدول (۱.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در شکل (۱.۲.۵) ارائه شده است.

۲.۲.۵ حل مسئله‌ی جریان ثابت از یک سیال سه بعدی در یک فضای نیمه متخلخل با توابع هرمیت

در این مسئله از تغییر متغییر $\frac{1}{k}ln(z)$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

$$p(z) = \frac{1}{1 + \lambda z + z^2}, \tag{۲۹.۵}$$

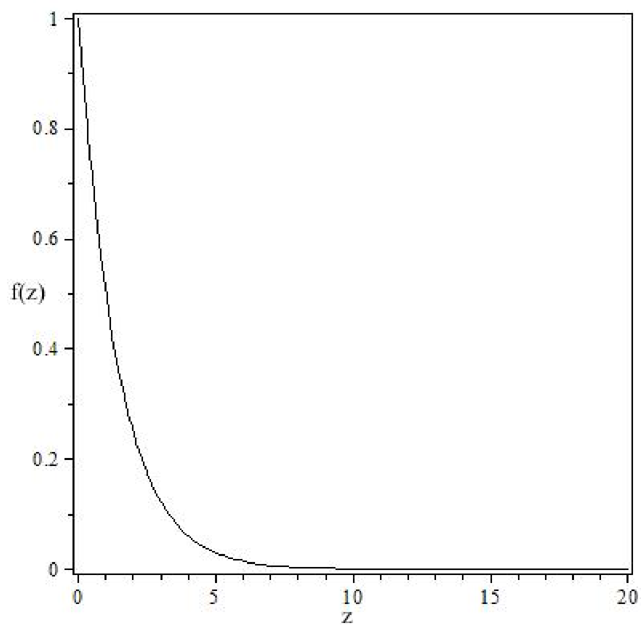
که λ ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(z)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\hat{\xi}_N f(z) = P(z) + \hat{\xi}_N f(z), \tag{۳۰.۵}$$

حال تابع باقیمانده را با جای‌گذاری معادله‌ی (۳۰.۵) را در معادله‌ی (۲۱.۵) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

جدول ۱.۵: مقایسه‌ی حل به‌دست آمده با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده و حل به‌دست آمده توسط احمد برای $b_1 =$ ۰/۶، $b_2 =$ ۰/۱، $b_3 =$ ۰/۵ با $N =$ ۲۰، $\alpha =$ ۱، $L =$ ۰/۹۹ .

z	توابع لاگر اصلاح‌شده [۶۹]	احمد [۶۷]	شوتینگ [۶۷]
۰/۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰
۰/۲	۰/۸۷۲۶۱	۰/۸۷۲۲۰	۰/۸۷۲۶۰
۰/۴	۰/۷۶۰۶۳	۰/۷۶۰۱۰	۰/۷۶۰۶۰
۰/۶	۰/۶۶۲۴۳	۰/۶۶۱۹۰	۰/۶۶۲۴۰
۰/۸	۰/۵۷۶۵۰	۰/۵۷۶۰۰	۰/۵۷۶۵۰
۱/۰	۰/۵۰۱۴۴	۰/۵۰۱۰۰	۰/۵۰۱۴۰
۱/۲	۰/۴۳۵۹۵	۰/۴۳۵۶۰	۰/۴۳۵۹۰
۱/۶	۰/۳۲۹۲۰	۰/۳۲۸۹۰	۰/۳۲۹۲۰
۲/۰	۰/۲۴۸۳۸	۰/۲۴۸۲۰	۰/۲۴۸۴۰
۲/۵	۰/۱۷۴۵۵	۰/۱۷۴۴۰	۰/۱۷۴۵۰
۲/۷	۰/۱۵۱۵۶	۰/۱۵۱۴۰	۰/۱۵۱۶۰
۳/۰	۰/۱۲۲۶۱	۰/۱۲۲۵۰	۰/۱۲۲۶۰
۳/۶	۰/۰۸۰۲۴	۰/۰۸۰۱۶	۰/۰۸۰۲۴
۴/۰	۰/۰۶۰۴۷	۰/۰۶۰۴۲	۰/۰۶۰۴۷
۴/۲	۰/۰۵۲۵۰	۰/۰۵۲۴۵	۰/۰۵۲۵۰
۴/۴	۰/۰۴۵۵۸	۰/۰۴۵۵۳	۰/۰۴۵۵۸
۴/۶	۰/۰۳۹۵۷	۰/۰۳۹۵۳	۰/۰۳۹۵۷
۴/۸	۰/۰۳۴۳۵	۰/۰۳۴۳۲	۰/۰۳۴۳۵
۵/۰	۰/۰۲۹۸۲	۰/۰۲۹۷۹	۰/۰۲۹۸۲
$f'(0)$	−۰/۶۷۸۲۹۷	−۰/۶۸۱۸۳۵	−۰/۶۷۸۳۰۱



شکل ۱.۵: نمودار تقریبی به‌دست آمده از $f(z)$ با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده در $N = 20$، $\alpha = 1$، $L = 0.99$.

$$Res(z) = (p''(z) + \hat{\xi}_N f''(z)) + b_1(p'(z) + \hat{\xi}_N f'(z))^2(p''(z) + \hat{\xi}_N f''(z)) \quad (31.5)$$
$$-b_2(p(z) + \hat{\xi}_N f(z))(p'(z) + \hat{\xi}_N f'(z))^2 - b_3(p(z) + \hat{\xi}_N f(z)) = 0.$$

با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع هرمیت تبدیل‌یافته می‌باشند در معادله‌ی (۳۱.۵) ، N معادله تشکیل می‌شود که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب $\hat{a}_i$ را پیدا کنیم.

این مسئله توسط احمد [۶۷] و حیات و دیگران [۶۸] در دو مقاله‌ی مجزا با انتخاب پارامترهای $b_1 = 0.6$ و $b_2 = 0.1$ و $b_3 = 0.5$ حل شده است. احمد [۶۷] با استفاده از روش شوتینگ [1] مقدار $f'(0) = -0.678301$ را بدست آورده است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع هرمیت تبدیل‌یافته حل کرده‌ایم و نتایجمان را با نتایج به‌دست آمده توسط احمد در جدول (۲.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در شکل (۲.۲.۵) ارائه شده است.

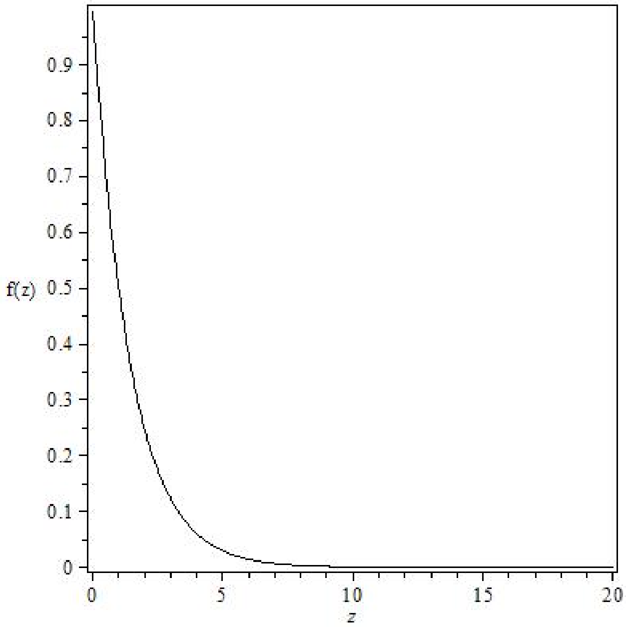
۳.۲.۵ حل مسئله‌ی جریان ثابت از یک سیال سه بعدی در یک فضای نیمه متخلخل با توابع سینک

در این مسئله از تغییر متغییر $\phi(z) = ln(\sinh(z))$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

[1] Shooting method

جدول ۲.۵: مقایسه حل بدست آمدهبا استفاده از توابع هرمیت تبدیل‌یافته و حل به‌دست آمده توسط احمد برای $b_1 =$ ۰/۶، $b_2 =$ ۰/۱، $b_3 =$ ۰/۵ با $N =$ ۱۶، $k =$ ۱/۲، $\lambda =$ ۰/۶۷۸۳۰۱ .

z	توابع هرمیت تبدیل‌یافته	احمد [۶۷]	شوتینگ [۶۷]
۰/۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰
۰/۲	۰/۸۷۲۶۱	۰/۸۷۲۲۰	۰/۸۷۲۶۰
۰/۴	۰/۷۶۰۶۴	۰/۷۶۰۱۰	۰/۷۶۰۶۰
۰/۶	۰/۶۶۲۴۳	۰/۶۶۱۹۰	۰/۶۶۲۴۰
۰/۸	۰/۵۷۶۴۷	۰/۵۷۶۰۰	۰/۵۷۶۵۰
۱/۰	۰/۵۰۱۳۹	۰/۵۰۱۰۰	۰/۵۰۱۴۰
۱/۲	۰/۴۳۵۹۱	۰/۴۳۵۶۰	۰/۴۳۵۹۰
۱/۶	۰/۳۲۹۱۷	۰/۳۲۸۹۰	۰/۳۲۹۲۰
۲/۰	۰/۲۴۸۳۹	۰/۲۴۸۲۰	۰/۲۴۸۴۰
۲/۵	۰/۱۷۴۵۹	۰/۱۷۴۴۰	۰/۱۷۴۵۰
۲/۷	۰/۱۵۱۶۱	۰/۱۵۱۴۰	۰/۱۵۱۶۰
۳/۰	۰/۱۲۲۷۰	۰/۱۲۲۵۰	۰/۱۲۲۶۰
۳/۶	۰/۰۸۰۳۶	۰/۰۸۰۱۶	۰/۰۸۰۲۴
۴/۰	۰/۰۶۰۶۰	۰/۰۶۰۴۲	۰/۰۶۰۴۷
۴/۲	۰/۰۵۲۶۱	۰/۰۵۲۴۵	۰/۰۵۲۵۰
۴/۴	۰/۰۴۵۶۷	۰/۰۴۵۵۳	۰/۰۴۵۵۸
۴/۶	۰/۰۳۹۶۴	۰/۰۳۹۵۳	۰/۰۳۹۵۷
۴/۸	۰/۰۳۴۴۰	۰/۰۳۴۳۲	۰/۰۳۴۳۵
۵/۰	۰/۰۲۹۸۴	۰/۰۲۹۷۹	۰/۰۲۹۸۲
$f'($۰$)$	−۰/۶۷۸۳۰۱	−۰/۶۸۱۸۳۵	−۰/۶۷۸۳۰۱



شکل ۲.۵: نمودار تقریبی به‌دست آمده از $f(z)$ با استفاده از توابع هرمیت تبدیل‌یافته در $N = ۱۶$، $k = ۱/۲$، $\lambda = ۰/۶۷۸۳۰۱$.

$$p(z) = \frac{۱}{۱ + \lambda z + z^{۲}}, \qquad (۳۲.۵)$$

که λ ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(z)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$f(z) \simeq f_N(z) = u_N(z) + p(z), \qquad (۳۳.۵)$$

که در آن

$$u_n(z) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{zS_k(z)}{z^{۲} + ۱}. \qquad (۳۴.۵)$$

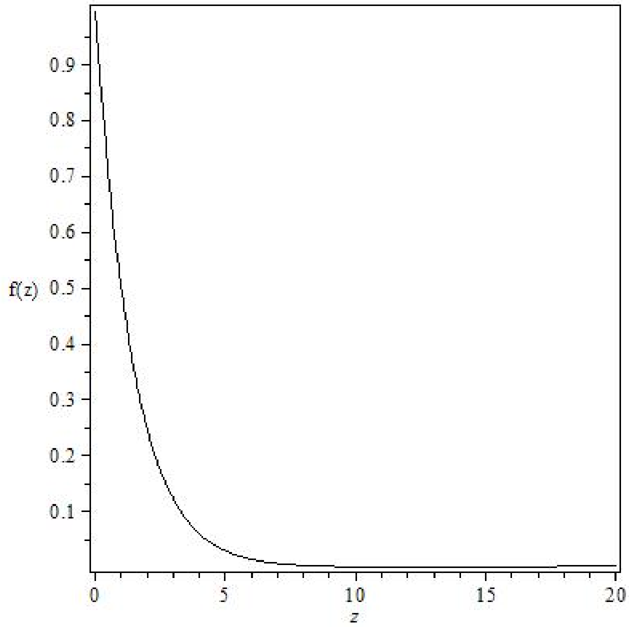
حال برای یافتن ضرایب مجهول c_kها، معادله‌ی (۳۳.۵) را در معادله‌ی ۲۲.۵) جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌مکانی زیر

$$z_j = ln(e^{jh} + (۱ + e^{۲jh})^{\frac{۱}{۲}}), \quad j = -N, ..., N \qquad (۳۵.۵)$$

آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. حال با توجه به معادلات (۲۲.۴) تا (۲۴.۴) و نیز معادله‌ی (۳۴.۵) داریم:

$$u_N(z_j) = \frac{c_j z_j}{z_j^{۲} + ۱}, \qquad (۳۶.۵)$$

$$\begin{aligned} u'_N(z_j) &= \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k \{ (\frac{۱}{۱+z_j^{۲}} - \frac{۲z_j^{۲}}{(۱+z_j^{۲})^{۲}})\delta_{k,j}^{(۰)} \\ &\quad + (\frac{z_j\phi'(z_j)}{۱+z_j^{۲}})\delta_{k,j}^{(۱)} \}, \end{aligned} \qquad (۳۷.۵)$$



شکل ۳.۵: نمودار تقریبی به‌دست آمده از $f(z)$ با استفاده از توابع سینک در $N = ۱۷$، $h = ۱$، $\lambda = ۰/۴۷$.

$$\begin{aligned} u''_N(z_j) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k \{ (\frac{-۶z_j}{(۱+z_j^۲)^۲} + \frac{۸z_j^۳}{(۱+z_j^۲)^۳})\delta_{k,j}^{(۰)} \\ &+ (\frac{۲\phi'(z_j)}{۱+z_j^۲} - \frac{۴z_j^۲\phi'(z_j)}{(۱+z_j^۲)^۲} + \frac{z_j\phi'(z_j)}{۱+z_j^۲})\delta_{k,j}^{(۱)} \\ &+ (\frac{z_j(\phi'(z_j))^۲}{۱+z_j^۲})\delta_{k,j}^{(۲)} \}. \end{aligned} \quad (۳۸.۵)$$

با جایگذاری معادلات (۳۶.۵) تا (۳۸.۵) در معادله‌ی (۲۲.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & f''_N(z_j) + b_۱(f'_N(z_j))^۲ f''_N(z_j) \\ & -b_۲ f_N(z_j)(f'_N(z_j))^۲ - b_۳ f_N(z_j) = ۰, \quad j = -N, ..., N. \end{aligned} \quad (۳۹.۵)$$

معادله‌ی (۳۹.۵) تشکیل یک دستگاه $۲N + ۱$ معادله می‌دهد که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب c_k را پیدا کنیم.

این مسئله توسط احمد [۶۷] و حیات و دیگران [۶۸] در دو مقاله‌ی مجزا با انتخاب پارامترهای $b_۱ = ۰/۶$ و $b_۲ = ۰/۱$ و $b_۳ = ۰/۵$ حل شده است. احمد [۶۷] با استفاده از روش شوتینگ [۲] مقدار $f'(۰) = -۰/۶۷۸۳۰۱$ را به‌دست آورده است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع سینک حل کرده‌ایم و نتایجمان را با نتایج به‌دست آمده توسط احمد در جدول (۳.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در شکل (۳.۲.۵) ارائه شده است.

[۲] Shooting method

جدول ۳.۵: مقایسه حل بدست آمده با استفاده از توابع سینک و حل به‌دست آمده توسط احمد برای $b_1 = ۰/۶$، $b_2 = ۰/۱$، $b_3 = ۰/۵$ با $N = ۱۷$، $h = ۱$، $\lambda = ۰/۴۷$.

z	توابع سینک	احمد [۶۷]	شوتینگ [۶۷]
۰/۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰
۰/۲	۰/۸۷۲۷۸	۰/۸۷۲۲۰	۰/۸۷۲۶۰
۰/۴	۰/۷۶۰۳۵	۰/۷۶۰۱۰	۰/۷۶۰۶۰
۰/۶	۰/۶۶۱۷۸	۰/۶۶۱۹۰	۰/۶۶۲۴۰
۰/۸	۰/۵۷۵۹۷	۰/۵۷۶۰۰	۰/۵۷۶۵۰
۱/۰	۰/۵۰۱۱۵	۰/۵۰۱۰۰	۰/۵۰۱۴۰
۱/۲	۰/۴۳۵۸۳	۰/۴۳۵۶۰	۰/۴۳۵۹۰
۱/۶	۰/۳۲۹۰۵	۰/۳۲۸۹۰	۰/۳۲۹۲۰
۲/۰	۰/۲۴۸۰۲	۰/۲۴۸۲۰	۰/۲۴۸۴۰
۲/۵	۰/۱۷۴۲۶	۰/۱۷۴۴۰	۰/۱۷۴۵۰
۲/۷	۰/۱۵۱۴۱	۰/۱۵۱۴۰	۰/۱۵۱۶۰
۳/۰	۰/۱۲۲۶۵	۰/۱۲۲۵۰	۰/۱۲۲۶۰
۳/۶	۰/۰۸۰۲۵	۰/۰۸۰۱۶	۰/۰۸۰۲۴
۴/۰	۰/۰۶۰۳۳	۰/۰۶۰۴۲	۰/۰۶۰۴۷
۴/۲	۰/۰۵۲۳۳	۰/۰۵۲۴۵	۰/۰۵۲۵۰
۴/۴	۰/۰۴۵۴۳	۰/۰۴۵۵۳	۰/۰۴۵۵۸
۴/۶	۰/۰۳۹۴۸	۰/۰۳۹۵۳	۰/۰۳۹۵۷
۴/۸	۰/۰۳۴۳۴	۰/۰۳۴۳۲	۰/۰۳۴۳۵
۵/۰	۰/۰۲۹۸۷	۰/۰۲۹۷۹	۰/۰۲۹۸۲
$f'(۰)$	−۰/۶۷۷۸۴۳	−۰/۶۸۱۸۳۵	−۰/۶۷۸۳۰۱

۳.۵ مسئله‌ی توماس-فرمی

معادله‌ی توماس-فرمی یک معادله‌دیفرنسیل غیرخطی به صورت زیر است [۷۰، ۷۱]:

$$\frac{d^{y}}{dx^{2}} = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}(x), \qquad (۴۰.۵)$$

که دارای شرایط مرزی زیر است:

$$y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0. \qquad (۴۱.۵)$$

این معادله توصیف‌گر چگالی بار اتم‌هایی می‌باشد که دارای عدد اتمی بزرگی هستند و در مسائلی پیرامون تعیین بار هسته در اتم‌های سنگین به‌کار می‌رود. این معادله در محاسبه‌ی عوامل شکل‌گیری پتانسیل موثر که به‌عنوان پتانسیل آزمایشی اولیه در میدان‌های خودسازگار مورد توجه است می‌تواند مفید باشد. همچنین این معادله می‌تواند در مطالعه‌ی رفتار نوکلئون‌ها در هسته‌ی اتم و رفتار الکترون‌ها در اتم‌های فلزات به‌کار برود.

اگر بخواهید به کمک روش رانگ-گوته این معادله را حل کنید از لحاظ عددی به مشکلی برخواهید خورد زیرا برای گرفتن انتگرال از صفر، به مقدار $y'(0)$ نیاز دارید، حال اگر $y'(0)$ خیلی کوچک در نظر گرفته شود، جواب معادله به ازای مقادیر x منفی می‌شود و در نتیجه با جواب دقیق معادله هم‌خوانی ندارد. از طرفی اگر مقدار $y'(0)$ بسیار بزرگ در نظر گرفته شود، آن‌گاه معادله به ازای یک نقطه‌ی xای ، منفرد خواهد شد. همچنین از لحاظ تجربی به این نکته پی برده شده است که مقدار $y'(0)$ در درستی مقادیر $y(x)$ تاثیر به‌سزایی دارد. بندر و همکارانش [۷۲] طرف راست معادله‌ی توماس-فرمی را با عبارتی که شامل پارامتر δ بوده است جایگزین کرده‌اند و آن را به فرم زیر درآورده‌اند:

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}} = y(x)\left(\frac{y(x)}{x}\right)^{\delta}, \qquad (۴۲.۵)$$

و سپس با بسط سری توانی برحسب δ آن‌را به‌صورت معادله‌ی:

$$y = y_0 + \delta y_1 + \delta^2 y_2 + \delta^3 y_3 + ..., \qquad (۴۳.۵)$$

نوشتند. این معادله منجر به تولید مجموعه معادلات خطی برحسب y_n می‌شود و به شکل

$$y_i^{''} - y_i = f_i \quad i = 0, 1, 2, ..., \qquad (۴۴.۵)$$

است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی برای $n > 1$ داریم:

$$\begin{aligned} &f_0 = 0, \quad f_i = f_i(y_0 ... y_{i-1}), \quad y_0(0) = 1, \quad y_0(\infty) = 0, \\ &y_n(0) = y_n(\infty) = 0. \end{aligned} \qquad (۴۵.۵)$$

مندلزوی و همکارانش [۷۳] به کمک روش شبه خطی معادله‌ی توماس-فرمی را به‌صورت $y'' = x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$ و برای $0 \leq x \leq 40$ حل کرده‌اند. روش آن‌ها برای xهای به اندازه‌ی کافی بزرگ دارای

همگرایی مناسبی بود. در [۷۴، ۷۵، ۷۶]از روش آشفتگی برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی معادله‌ی توماس-فرمی استفاده شده است. در [۷۸] از روش تجزیه‌ی آدومیان بهبود یافته برای حل معادله‌ی توماس-فرمی استفاده شده است. لیاو [۷۹، ۸۰] با استفاده از روش هوموتوپی، یک جواب تحلیلی صریح برای این مسئله ارائه کرد و خان [۸۱] نیز این مسئله را با استفاده از روش هوموتوپی حل کرد، تنها با این تفاوت که یک انتقال متفاوت استفاده کرد و جواب مسئله را بهبود بخشید.

در ادامه ما این مسئله را با توابع لاگر، هرمیت و سینک از طریق روش هم‌مکانی حل خواهیم کرد و با جواب‌هایی که در مقاله‌های [۸۱، ۸۲] ارائه شده است، مقایسه خواهیم کرد.

۱.۳.۵ حل مسئله‌ی توماس-فرمی با توابع لاگر

در ابتدای کار، $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$I_N f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(x), \tag{۴۶.۵}$$

حال برای یافتن ضرایب مجهول a_jها، معادله‌ی (۴۶.۵) را در معادله‌ی (۴۰.۵) و شرایط مرزی (۵.۴۱) جایگذاری می‌کنیم و تابع باقیمانده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Rez(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j''(x) - x^{-\frac{1}{2}} \{ \sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(x) \}^{\frac{3}{2}}, \tag{۴۷.۵}$$

با شرایط مرزی:

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(0) = 1, \tag{۴۸.۵}$$

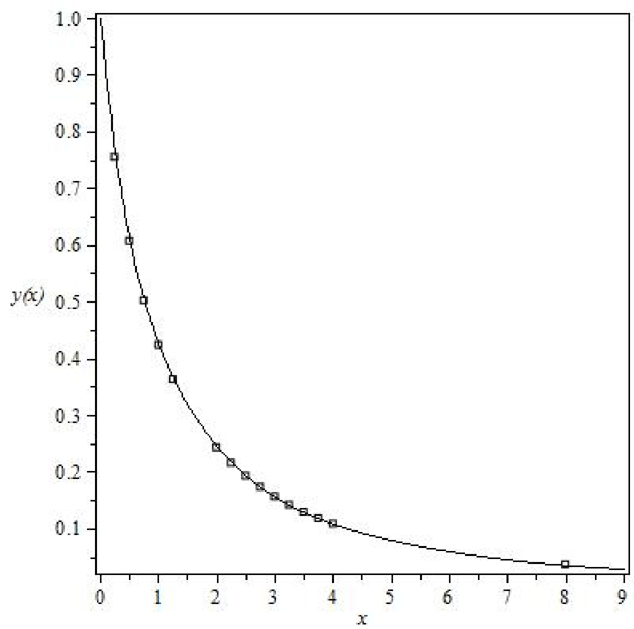
$$\sum_{j=0}^{N-1} a_j \phi_j(\infty) = 0. \tag{۴۹.۵}$$

با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع اصلاح‌شده‌ی لاگر می‌باشند در معادله‌ی (۵.۴۷) ، N معادله تشکیل می‌شود که به همراه شرط مرزی ذکر شده در معادله‌ی (۴۸.۵)، $N+1$ معادله خواهیم داشت که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب a_j را پیدا کنیم.

مقدار $y'(0)$ توسط کوبایاشی [۸۲] محاسبه شده است که مقدار آن برابر با $y'(0) = -1/588071$ است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع لاگر اصلاح‌شده حل کرده‌ایم و نتایج را با نتایج به‌دست آمده توسط کوبایاشی و لیاو در جدول (۴.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰] در شکل (۱.۳.۵) ارائه شده است.

جدول ۴.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده در $N = ۷$، $\alpha = ۱$، $L = ۰/۶۷۵$ در مقایسه با دیگر جواب‌ها.

z	لاگر اصلاح‌شده	لیاو [۸۰]
۰۰/۲۵	۰/۷۶۵۶۹۸۴۰۱	۰/۷۵۵۲۰۲۰۰۰
۰۰/۵۰	۰/۶۱۱۰۹۴۸۴۱	۰/۶۰۶۹۸۷۰۰۰
۰۰/۷۵	۰/۵۰۴۲۲۲۱۴۳	۰/۵۰۲۳۴۷۰۰۰
۰۱/۰۰	۰/۴۲۶۲۸۶۴۹۱	۰/۴۲۴۰۰۸۰۰۰
۰۱/۲۵	۰/۳۶۶۴۴۱۱۹۲	۰/۳۶۳۲۰۲۰۰۰
۰۲/۰۰	۰/۲۴۵۸۲۷۱۵۹	۰/۲۴۳۰۰۹۰۰۰
۰۲/۲۵	۰/۲۱۷۷۶۸۲۵۵	۰/۲۱۵۸۹۵۰۰۰
۰۲/۵۰	۰/۱۹۳۹۴۶۴۲۹	۰/۱۹۲۹۸۴۰۰۰
۰۲/۷۵	۰/۱۷۳۶۹۸۷۱۲	۰/۱۷۳۴۴۱۰۰۰
۰۳/۰۰	۰/۱۵۶۴۶۹۱۶۶	۰/۱۵۶۶۳۳۰۰۰
۰۳/۲۵	۰/۱۴۱۷۶۹۷۴۵	۰/۱۴۲۰۷۰۰۰۰
۰۳/۵۰	۰/۱۲۹۱۶۷۷۸۸	۰/۱۲۹۳۷۰۰۰۰
۰۳/۷۵	۰/۱۱۸۲۸۴۲۸۹	۰/۱۱۸۲۲۹۰۰۰
۰۴/۰۰	۰/۱۰۸۷۹۴۷۹۲	۰/۱۰۸۴۰۴۰۰۰
۰۸/۰۰	۰/۰۳۵۷۶۴۰۶۴	۰/۰۳۶۵۸۷۳۰۰
۱۵/۰۰	۰/۰۰۹۳۵۵۹۳۹	۰/۰۱۰۸۰۵۴۰۰
۲۰/۰۰	۰/۰۰۱۸۲۸۹۵۵	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
۳۰/۰۰	۰/۰۰۰۰۱۸۵۱۰	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
f'	لاگر اصلاح‌شده	کوبایاشی [۸۲]
$f'(۰)$	−۱/۱۵۸۴۲۵	−۱/۵۸۸۰۷۱



شکل ۴.۵: گراف توماس-فرمی به‌دست آمده با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده در $N = ۷$، $\alpha = ۱$، $L = ۰/۶۷۵$ در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰].

۲.۳.۵ حل مسئله‌ی توماس-فرمی با توابع هرمیت

در این مسئله از تغییر متغییر $\frac{۱}{k}ln(x)$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

$$p(x) = \frac{۱}{۱ + \lambda z + z^{۲}}, \tag{۵۰.۵}$$

که λ ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\hat{\xi}_N f(x) = P(x) + \hat{\xi}_N f(x), \tag{۵۱.۵}$$

حال تابع باقیمانده را با جای‌گذاری معادله‌ی (۵۱.۵) را در معادله‌ی (۴۰.۵) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Rez(x) = P''(x) + \hat{\xi}_N f''(x) - x^{-\frac{۱}{۲}}\{P(x) + \hat{\xi}_N f(x)\}^{\frac{۳}{۲}}. \tag{۵۲.۵}$$

با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع هرمیت تبدیل‌یافته می‌باشند در معادله‌ی (۵۲.۵)، N معادله تشکیل می‌شود که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب $\hat{a}_i$ را پیدا کنیم.

مقدار $y'(۰)$ توسط کوبایاشی [۸۲] محاسبه شده است که مقدار آن برار با $y'(۰) = -۱/۵۸۸۰۷۱$ است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع هرمیت تغییریافته حل کرده‌ایم و نتایج را با نتایج به‌دست

جدول ۵.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته در $N =$ ۱۵، $k =$ ۰/۹، $\lambda =$ ۱/۵۸۸۰۷۱ در مقایسه با دیگر جواب‌ها.

z	هرمیت تغییریافته	لیاو [۸۰]
۰۰/۲۵	۰/۷۵۴۷۹۵۳۳۰	۰/۷۵۵۲۰۲۰۰۰
۰۰/۵۰	۰/۶۰۶۶۵۸۹۰۸	۰/۶۰۶۹۸۷۰۰۰
۰۰/۷۵	۰/۵۰۲۱۱۰۵۱۰	۰/۵۰۲۳۴۷۰۰۰
۰۱/۰۰	۰/۴۲۳۸۱۱۲۰۳	۰/۴۲۴۰۰۸۰۰۰
۰۱/۲۵	۰/۳۶۳۰۲۷۷۲۵	۰/۳۶۳۲۰۲۰۰۰
۰۲/۰۰	۰/۲۴۲۹۱۸۲۳۳	۰/۲۴۳۰۰۹۰۰۰
۰۲/۲۵	۰/۲۱۵۸۱۹۸۱۸	۰/۲۱۵۸۹۵۰۰۰
۰۲/۵۰	۰/۱۹۲۹۱۷۹۴۸	۰/۱۹۲۹۸۴۰۰۰
۰۲/۷۵	۰/۱۷۳۳۷۹۶۲۳	۰/۱۷۳۴۴۱۰۰۰
۰۳/۰۰	۰/۱۵۶۵۷۳۷۷۳	۰/۱۵۶۶۳۳۰۰۰
۰۳/۲۵	۰/۱۴۲۰۱۳۳۶۸	۰/۱۴۲۰۷۰۰۰۰
۰۳/۵۰	۰/۱۲۹۳۱۶۶۱۳	۰/۱۲۹۳۷۰۰۰۰
۰۳/۷۵	۰/۱۱۸۱۸۰۲۰۹	۰/۱۱۸۲۲۹۰۰۰
۰۴/۰۰	۰/۱۰۸۳۶۰۴۴۱	۰/۱۰۸۴۰۴۰۰۰
۰۸/۰۰	۰/۰۳۶۵۸۰۴۲۷	۰/۰۳۶۵۸۷۳۰۰
۱۵/۰۰	۰/۰۱۰۸۰۳۷۷۴	۰/۰۱۰۸۰۵۴۰۰
۲۰/۰۰	۰/۰۰۵۷۹۲۸۳۱	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
۳۰/۰۰	۰/۰۰۲۲۵۲۶۳۴	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
f'	هرمیت تغییریافته	کوبایاشی [۸۲]
$f'(۰)$	−۱/۵۸۸۰۷۱	−۱/۵۸۸۰۷۱

آمده توسط کوبایاشی و لیاو در جدول (۵.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰] در شکل (۲.۳.۵) ارائه شده است.

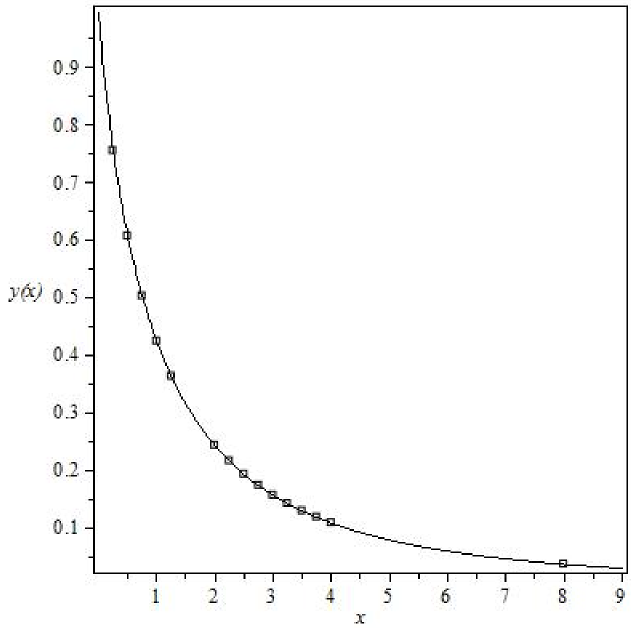
۳.۳.۵ حل مسئله‌ی توماس-فرمی با توابع سینک

در این مسئله از تغییر متغییر $\phi(x) = ln(\sinh(x))$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

$$p(x) = \frac{\lambda}{\lambda + x}, \qquad (۵۳.۵)$$

که λ ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$f(x) \simeq f_N(x) = u_N(x) + p(x), \qquad (۵۴.۵)$$



شکل ۵.۵: گراف توماس-فرمی به‌دست آمده با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته در $N = 15$، $k = 0/9$ ، $\lambda = 1/588071$ در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰].

که در آن

$$u_n(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{xS_k(x)}{x^2+1}. \qquad (55.5)$$

حال برای یافتن ضرایب مجهول c_kها، معادله‌ی (۵۴.۵) را در معادله‌ی (۴۰.۵) جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌مکانی زیر

$$x_j = ln(e^{jh} + (1+e^{2jh})^{\frac{1}{2}}), \quad j=-N,...,N \qquad (56.5)$$

آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. حال با توجه به معادلات (۲۲.۴) تا (۲۴.۴) و نیز معادله‌ی (۵۵.۵) داریم:

$$u_N(x_j) = \frac{c_j x_j}{x_j^2+1}, \qquad (57.5)$$

$$\begin{aligned} u'_N(x_j) \quad &= \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k \{ (\frac{1}{1+x_j^2} - \frac{2x_j^2}{(1+x_j^2)^2}) \delta_{k,j}^{(0)} \\ &+ (\frac{x_j \phi'(x_j)}{1+x_j^2}) \delta_{k,j}^{(1)} \}, \end{aligned} \qquad (58.5)$$

$$\begin{aligned} u''_N(x_j) \quad &= \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k \{ (\frac{-6x_j}{(1+x_j^2)^2} + \frac{8x_j^3}{(1+x_j^2)^3}) \delta_{k,j}^{(0)} \\ &+ (\frac{2\phi'(x_j)}{1+x_j^2} - \frac{4x_j^2\phi'(x_j)}{(1+x_j^2)^2} + \frac{x_j\phi'(x_j)}{1+x_j^2}) \delta_{k,j}^{(1)} \\ &+ (\frac{x_j(\phi'(x_j))^2}{1+x_j^2}) \delta_{k,j}^{(2)} \}. \end{aligned} \qquad (59.5)$$

جدول ۶.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع سینک در $N =$ ۱۱، $h =$ ۱، $\lambda =$ ۰/۷۷ در مقایسه با دیگر جواب‌ها.

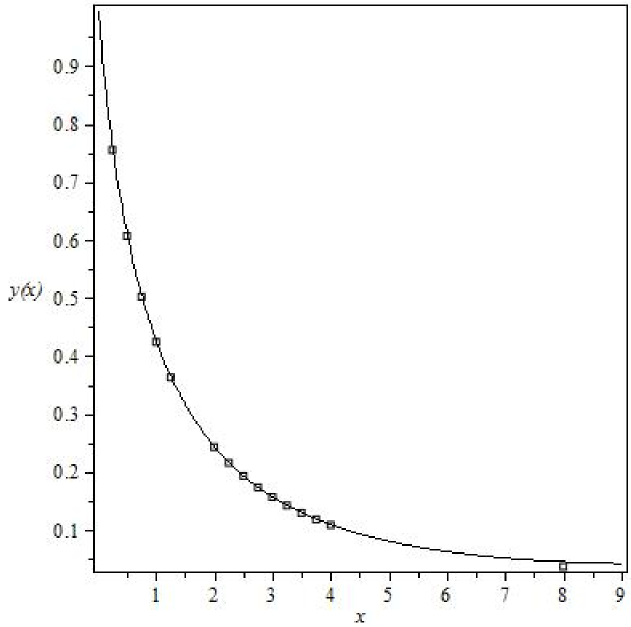
z	سینک	لیاو [۸۰]
۰۰/۲۵	۰/۷۵۵۵۰۱۵۱۳	۰/۷۵۵۲۰۲۰۰۰
۰۰/۵۰	۰/۶۰۶۵۹۱۳۷۴	۰/۶۰۶۹۸۷۰۰۰
۰۰/۷۵	۰/۵۰۲۰۱۷۸۳۶	۰/۵۰۲۳۴۷۰۰۰
۰۱/۰۰	۰/۴۲۴۱۸۱۹۰۵	۰/۴۲۴۰۰۸۰۰۰
۰۱/۲۵	۰/۳۶۳۶۹۶۲۶۳	۰/۳۶۳۲۰۲۰۰۰
۰۲/۰۰	۰/۲۴۳۲۵۷۸۷۸	۰/۲۴۳۰۰۹۰۰۰
۰۲/۲۵	۰/۲۱۶۱۵۶۰۲۴	۰/۲۱۵۸۹۵۰۰۰
۰۲/۵۰	۰/۱۹۳۳۹۵۴۰۱	۰/۱۹۲۹۸۴۰۰۰
۰۲/۷۵	۰/۱۷۴۰۷۸۶۹۹	۰/۱۷۳۴۴۱۰۰۰
۰۳/۰۰	۰/۱۵۷۴۹۸۹۳۷	۰/۱۵۶۶۳۳۰۰۰
۰۳/۲۵	۰/۱۴۳۱۲۵۴۷۱	۰/۱۴۲۰۷۰۰۰۰
۰۳/۵۰	۰/۱۳۰۵۷۷۹۲۶	۰/۱۲۹۳۷۰۰۰۰
۰۳/۷۵	۰/۱۱۹۵۸۳۹۰۲	۰/۱۱۸۲۲۹۰۰۰
۰۴/۰۰	۰/۱۰۹۹۳۳۳۷۲	۰/۱۰۸۴۰۴۰۰۰
۰۸/۰۰	۰/۰۴۶۳۲۵۶۰۷	۰/۰۳۶۵۸۷۳۰۰
۱۵/۰۰	۰/۰۴۹۰۸۹۳۴۵	۰/۰۱۰۸۰۵۴۰۰
۲۰/۰۰	۰/۰۳۶۹۹۲۹۹۰	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
۳۰/۰۰	۰/۰۲۴۹۹۶۵۴۹	۰/۰۰۵۷۸۴۹۴۰
f'	سینک	کوبایاشی [۸۲]
$f'(۰)$	−۱/۵۸۰۳۸۰	−۱/۵۸۸۰۷۱

با جایگذاری معادلات (۵۷.۵) تا (۵۹.۵) در معادله‌ی (۴۰.۵) خواهیم داشت:

$$f''_N(x_j) - (x_j)^{(} - \tfrac{۱}{۲})(f_N(x_j))^{\frac{۳}{۲}} = ۰, \quad j = -N, ..., N. \qquad (۶۰.۵)$$

معادله‌ی (۶۰.۵) تشکیل یک دستگاه $۲N + ۱$ معادله می‌دهد که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب c_k را پیدا کنیم.

مقدار $y'(۰)$ توسط کوبایاشی [۸۲] محاسبه شده است که مقدار آن برار با $y'(۰) = -$۱/۵۸۸۰۷۱ است. در این قسمت ما این مسئله را با توابع سینک حل کرده‌ایم و نتایج را با نتایج به‌دست آمده توسط کوبایاشی و لیاو در جدول (۶.۵) مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰] در شکل (۳.۳.۵) ارائه شده است.



شکل ۶.۵: گراف توماس-فرمی به‌دست آمده با استفاده از توابع سینک در $N = ۱۱$، $h = ۱$، $\lambda = ۰/۷۷$ در مقایسه با جواب‌های لیاو [۸۰].

۴.۵ مسئله‌ی انتقال گرما در یک سیال دارسین

یک مخروط وارونه را فرض کنید γ و محورهایی که در شکل (۴.۵)، در حالت (a) دیده می‌شود. این مخروط در ماده‌ای متخلخل با دمای مشخص دیواره تعبیه شده است. تابع جریان ψ تعریف می‌شود [۸۳، ۸۴]:

$$u = \frac{۱}{r}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{۱}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{۶۱.۵}$$

معادلات لایه‌ی مرزی روی یک مخروط ناقص گرم شده که $x = x_۰$ است، پیاده‌سازی می‌شوند و عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\frac{۱}{r}\frac{\partial^۲\psi}{\partial y^۲} = \frac{g\beta K}{v}\frac{\partial T}{\partial y}, \\ &\frac{۱}{r}(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}) = \alpha\frac{\partial^۲ T}{\partial y^۲}. \end{aligned} \tag{۶۲.۵}$$

برای یک لایه‌ی نازک به‌طور تقریبی $r = x\sin(\gamma)$ فرض می‌شود. همچنین دما را تابع توانی از طول یال مخروط فرض می‌کنیم. از این‌رو شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} &u = ۰,\ T = T_\infty \quad as\ \ y \to \infty, \\ &u = ۰ \quad at\ \ y = ۰, x_۰ \le x < \infty. \end{aligned} \tag{۶۳.۵}$$

همچنین دمای دیواره‌ی q_w به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q_w = -k(\frac{\partial T}{\partial y})_{y=\circ} = A(x-x_\circ)^\lambda \qquad at \ \ x_\circ \leq x < \infty. \tag{۶۴.۵}$$

برای حالت مخروط کامل که $x_\circ = \circ$ است، شکل (۴.۵) در حالت (b)، جواب‌های مشابهی وجود دارد. در حالتی که دمای دیواره ثابت است داریم:

$$\begin{aligned} &\psi = \alpha r Ra_x^{\frac{۱}{۳}} f(\eta), \\ &T - T_\infty = \frac{q_w x}{k} Ra_x^{\frac{۱}{۳}} \theta(\eta), \\ &\eta = \frac{y}{x} Ra_x^{\frac{۱}{۳}}. \end{aligned} \tag{۶۵.۵}$$

جایی‌که

$$Ra_x = \frac{\rho_\infty \beta g K \cos(\gamma) q_w x^{۲}}{\mu \alpha k}. \tag{۶۶.۵}$$

حال معادلات حاکم عبارتند از [۸۳، ۸۴، ۸۵]:

$$\begin{aligned} &f' = \theta, \\ &\theta'' + (\frac{\lambda+۵}{۲}) f\theta' - (\frac{۲\lambda+۱}{۳)}) f'\theta = \circ. \end{aligned} \tag{۶۷.۵}$$

با شرایط مرزی

$$f(\circ) = \circ, \ \ \theta'(\circ) = -۱, \ \ \theta(\infty) = \circ. \tag{۶۸.۵}$$

در نهایت داریم

$$\begin{aligned} &ODE. \quad f''' + (\frac{\lambda+۵}{۲}) ff'' - (\frac{۲\lambda+۱}{۳})(f')^{۲} = \circ, \\ &Bc. \quad f(\circ) = \circ, \ \ f''(\circ) = -۱, \ \ f'(\infty) = \circ. \end{aligned} \tag{۶۹.۵}$$

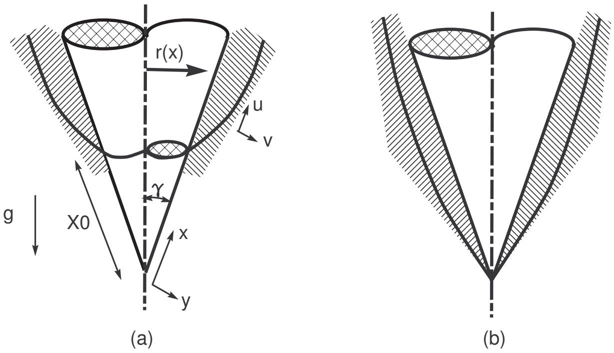
هدف به‌دست آوردن مقدار عدد ناسلت است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu_x = \frac{q_w x}{k(T_w - T_\infty)}, \tag{۷۰.۵}$$

از معادلات پیشین مشخص می‌شود که عدد ناسلت برابر است با [۸۳، ۸۴]:

$$Nu_x = Ra_x^{\frac{۱}{۳}} [-\theta'(\circ)]. \tag{۷۱.۵}$$

در ادامه ما این مسئله را با توابع لاگر، هرمیت و سینک حل خواهیم کرد و با جواب‌های بدست آمده که در مقاله‌ی [۸۳] ارائه شده است، مقایسه خواهیم کرد.



شکل ۷.۵: سیستم مختصات برای لایه‌ی مرزی (a) روی تکه‌ای گرم شده از مخروط (b) مخروط کامل $x_{۰} = ۰$.

۱.۴.۵ حل مسئله‌ی انتقال گرما در یک سیال دارسین با توابع لاگر

در ابتدای کار، $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$I_N f(x) = \sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j(x), \qquad (۷۲.۵)$$

حال برای یافتن ضرایب مجهول a_jها، معادله‌ی (۷۲.۵) را در معادله و شرایط مرزی (۶۹.۵) جایگذاری می‌کنیم و تابع باقیمانده را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Rez(x) &= \sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j'''(x) + \left(\tfrac{\lambda+۵}{۲}\right) \sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j(x) \sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j''(x) \\ &\quad -\left(\tfrac{۲\lambda+۱}{۳}\right)\left(\sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j'(x)\right)^{۲}, \end{aligned} \qquad (۷۳.۵)$$

با شرایط مرزی:

$$\sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j(۰) = ۰, \qquad (۷۴.۵)$$

$$\sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j''(۰) = -۱, \qquad (۷۵.۵)$$

$$\sum_{j=۰}^{N-۱} a_j \phi_j'(\infty) = ۰. \qquad (۷۶.۵)$$

با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع اصلاح‌شده‌ی لاگر می‌باشند در معادله‌ی (۷۳.۵)، N معادله تشکیل می‌شود که به همراه شرایط مرزی ذکر شده در معادلات (۷۴.۵) و (۷۵.۵)، $N+۲$ معادله خواهیم داشت که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب a_j را پیدا کنیم.

جدول ۷.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده در $N = ۱۳$ در مقایسه با رانگ- گوته.

λ	رانگ- گوته [۸۷]	لاگر اصلاح‌شده [۸۶]	α	L
۰	۰/۹۴۷۶۰	۰/۹۴۷۶۹۷۲۵۶	۱	۱/۲۹۸۵
$\frac{۱}{۴}$	۰/۹۱۱۳۰	۰/۹۱۱۲۹۲۲۹۵	۰/۹۴۸۶۹	۱/۲۴۰۹۳
$\frac{۱}{۳}$	۰/۹۰۰۳۰	۰/۹۰۰۳۰۵۸۰۶	۱	۱/۱۵
$\frac{۱}{۲}$	۰/۸۷۹۸۰	۰/۸۷۹۳۳۲۰۹۰	۱	۱/۰۹
$\frac{۳}{۴}$	۰/۸۵۲۲۰	۰/۸۵۲۲۸۷۰۷۴	۰/۰۴	۱/۰۳۹۴
۰	۰/۸۲۷۶۰	۰/۸۲۵۲۸۸۷۹۵	۰/۶۵۵	۱/۱۱۵

در جدول (۷.۵) نتایج به‌دست آمده از توابع لاگر اصلاح‌شده [۸۶]، برای $f'(۰)$ به ازای مقادیر مختلف λ با مقادیر به‌دست آمده از رانگ- گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. در جداول (۸.۵) و (۹.۵) مقادیر به‌دست آمده از توابع لاگر اصلاح‌شده [۸۶]، برای $f'(x)$ به ازای مقادیر $\lambda = \frac{۱}{۴}, \lambda = \frac{۳}{۴}$ در نقاط مختلف x با مقادیر به‌دست آمده از رانگ- گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازاس مقادیر مختلف λ در شکل (۱.۴.۵) ارائه شده است.

۲.۴.۵ حل مسئله‌ی انتقال گرما در یک سیال دارسین با توابع هرمیت

در این مسئله از تغییر متغییر $\frac{۱}{k}ln(x)$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

$$p(x) = \frac{\beta^{۲} x}{۲(\beta + x)}, \tag{۷۷.۵}$$

که β ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\hat{\xi}_N f(x) = P(x) + \hat{\xi}_N f(x), \tag{۷۸.۵}$$

حال تابع باقیمانده را با جای‌گذاری معادله‌ی (۷۸.۵) را در معادله‌ی (۶۹.۵) به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Rez(x) &= P'''(x) + \hat{\xi}_N f'''(x) + (\tfrac{\lambda+۵}{۲})(P(x) + \hat{\xi}_N f(x))(P''(x) + \hat{\xi}_N f''(x)) \\ &\quad -(\tfrac{۲\lambda+۱}{۳})(P'(x) + \hat{\xi}_N f'(x))^{۲}. \end{aligned} \tag{۷۹.۵}$$

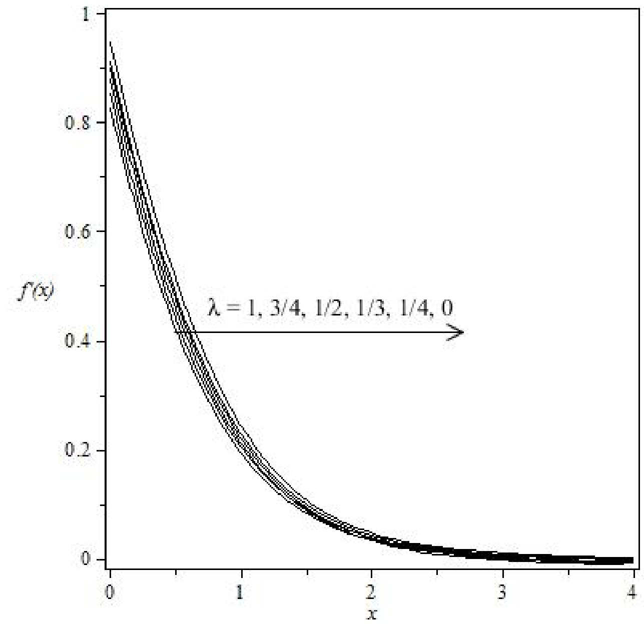
با قرار دادن N نقطه‌ی هم‌مکانی که ریشه‌های توابع هرمیت تبدیل‌یافته می‌باشند در معادله‌ی (۷۹.۵) ، N معادله تشکیل می‌شود که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب $\hat{a}_i$ را پیدا کنیم.

جدول ۸.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{1}{4}$ با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده

x	رانگ-گوته [۸۷]	لاگر اصلاح‌شده [۸۶]
۰	۰/۹۱۱۲۹۵	۰/۹۱۱۲۹۲۲۹۵
۰/۱	۰/۸۱۳۶۰۴	۰/۸۱۳۶۰۴۵۷۳۲
۰/۲	۰/۷۲۱۳۵۱	۰/۷۲۱۴۳۳۳۰۴۱
۰/۳	۰/۶۳۵۵۳۱	۰/۶۳۵۷۲۷۸۵۸۳
۰/۴	۰/۵۵۶۶۶۱	۰/۵۵۷۰۱۲۸۳۱۹
۰/۵	۰/۴۸۴۹۹۷	۰/۴۸۵۴۸۷۰۲۱۳
۰/۶	۰/۴۲۰۵۸۷	۰/۴۲۱۱۰۴۵۴۱۶
۰/۷	۰/۳۶۳۲۷۶	۰/۳۶۳۶۴۰۸۴۱۶
۰/۸	۰/۳۱۲۶۷۷	۰/۳۱۲۷۴۵۹۰۳۶
۰/۹	۰/۲۶۸۲۶۴	۰/۲۶۷۹۸۶۴۲۴۱
۱	۰/۲۲۹۵۰۸	۰/۲۲۸۸۷۹۳۸۷۷
۱/۱	۰/۱۹۵۸۷۸	۰/۱۹۴۹۱۷۹۵۹۶
۱/۲	۰/۱۶۶۸۴۷	۰/۱۶۵۵۹۱۲۳۶۱
۱/۳	۰/۱۴۱۸۳۷	۰/۱۴۰۳۹۹۲۶۹۵
۱/۴	۰/۱۲۰۳۶۲	۰/۱۱۸۸۶۳۳۲۲۳
۱/۵	۰/۱۰۲۰۲۵	۰/۱۰۰۵۳۳۵۳۲۱
۲	۰/۰۴۳۹۵۱	۰/۰۴۳۶۷۷۵۶۸۹
۲/۵	۰/۰۱۸۵۴۶	۰/۰۱۹۶۸۲۹۵۲۸
۳	۰/۰۰۷۶۱۰	۰/۰۰۸۸۰۱۲۳۴۳
۳/۵	۰/۰۰۲۹۵۳	۰/۰۰۳۰۴۴۰۹۶۴
۴	۰/۰۰۰۹۶۲	−۰/۰۰۰۱۱۵۹۳۶۴
۴/۵	۰/۰۰۰۱۲۳	−۰/۰۰۱۴۲۱۷۹۰۴

جدول ۹.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{3}{4}$ با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده

x	رانگ- گوته [۸۷]	لاگر اصلاح‌شده [۸۶]
۰	۰/۸۵۲۱۹۳	۰/۸۵۲۲۸۷۰۷۴
۰/۱	۰/۷۵۵۳۷۷	۰/۷۵۵۳۴۷۲۰۴۳
۰/۲	۰/۶۶۵۴۴۸	۰/۶۶۵۲۴۳۷۹۹۸
۰/۳	۰/۵۸۲۹۸۵	۰/۵۸۲۶۴۳۸۸۵۴
۰/۴	۰/۵۰۸۱۴۱	۰/۵۰۷۷۸۷۰۱۱۲
۰/۵	۰/۴۴۰۸۴۹	۰/۴۴۰۶۰۴۳۱۴۵
۰/۶	۰/۳۸۰۹۰۷	۰/۳۸۰۸۱۲۰۱۴۷
۰/۷	۰/۳۲۷۹۷۳	۰/۳۲۷۹۸۳۸۴۱۸
۰/۸	۰/۲۸۱۵۳۶	۰/۲۸۱۶۰۶۵۹۴۰
۰/۹	۰/۲۴۱۰۱۳	۰/۲۴۱۱۲۱۹۸۷۱
۱	۰/۲۰۵۸۳۲	۰/۲۰۵۹۵۷۴۹۵۲
۱/۱	۰/۱۷۵۴۳۴	۰/۱۷۵۵۴۸۶۵۳۲
۱/۲	۰/۱۴۹۲۷۵	۰/۱۴۹۳۵۴۴۲۶۳
۱/۳	۰/۱۲۶۸۲۱	۰/۱۲۶۸۶۷۳۵۴۳
۱/۴	۰/۱۰۷۵۹۶	۰/۱۰۷۶۱۹۵۴۴۵
۱/۵	۰/۰۹۱۱۹۶	۰/۰۹۱۱۸۵۷۶۸۶
۲	۰/۰۳۹۲۲۳	۰/۰۳۹۲۹۹۹۷۰۰
۲/۵	۰/۰۱۶۵۷۴	۰/۰۱۶۵۶۸۷۰۸۰
۳	۰/۰۰۶۸۳۲	۰/۰۰۶۷۳۱۲۵۴۰
۳/۵	۰/۰۰۲۶۶۸	۰/۰۰۲۶۴۹۱۵۴۸
۴	۰/۰۰۰۹۱۳	۰/۰۰۱۱۴۲۷۵۵۷
۴/۵	۰/۰۰۰۲۳۷	۰/۰۰۰۶۵۶۵۴۵۱



شکل ۸.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ با استفاده از توابع لاگر اصلاح‌شده به ازای $\lambda = ۱, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, ۰$.

در جدول (۱۰.۵) نتایج به‌دست آمده از توابع هرمیت تغییریافته، برای $f'(۰)$ به ازای مقادیر مختلف λ با مقادیر به‌دست آمده از رانگ- گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. در جداول (۱۱.۵) و (۱۲.۵) مقادیر به‌دست آمده از توابع هرمیت تغییریافته، برای $f'(x)$ به ازای مقادیر $\lambda = \frac{۳}{۴}, \lambda = \frac{۱}{۴}$ در نقاط مختلف x با مقادیر به‌دست آمده از رانگ- گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازاس مقادیر مختلف λ در شکل (۲.۴.۵) ارائه شده است.

جدول ۱۰.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته در $N = ۲۰$ در مقایسه با رانگ- گوته.

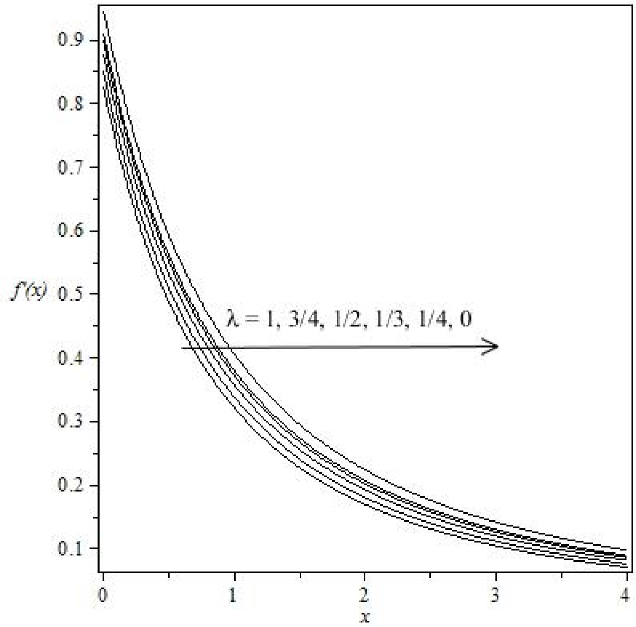
λ	رانگ- گوته [۸۷]	هرمیت تغییریافته	k	β
۰	۰/۹۴۷۶۰	۰/۹۴۷۳۵۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۸۹۴۷
$\frac{۱}{۴}$	۰/۹۱۱۳۰	۰/۹۱۱۳۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۸۲۲۶
$\frac{۱}{۳}$	۰/۹۰۰۳۰	۰/۹۰۰۳۵۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۸۰۰۷
$\frac{۱}{۲}$	۰/۸۷۹۸۰	۰/۸۷۹۳۳۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۷۵۸۶۶
$\frac{۳}{۴}$	۰/۸۵۲۲۰	۰/۸۵۲۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۷۰۴۲
۰	۰/۸۲۷۶۰	۰/۸۲۷۶۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۵	۱/۶۵۵۲

جدول ۵.۱۱: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{۱}{۴}$ با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته

x	رانگ- گوته [۸۷]	هرمیت تغییریافته
۰	۰/۹۱۱۲۹۵	۰/۹۱۱۳۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۸۱۳۶۰۴	۰/۸۱۸۹۶۶۶۸
۰/۲	۰/۷۲۱۳۵۱	۰/۷۳۹۹۸۷۰۱۰
۰/۳	۰/۶۳۵۵۳۱	۰/۶۷۱۹۰۴۸۶۰
۰/۴	۰/۵۵۶۶۶۱	۰/۶۱۲۸۰۳۸۴۶
۰/۵	۰/۴۸۴۹۹۷	۰/۵۶۱۱۷۱۰۵۰
۰/۶	۰/۴۲۰۵۸۷	۰/۵۱۵۷۹۹۲۱۴
۰/۷	۰/۳۶۳۲۷۶	۰/۴۷۵۷۱۵۵۱۹
۰/۸	۰/۳۱۲۶۷۷	۰/۴۴۰۱۲۹۰۰۳
۰/۹	۰/۲۶۸۲۶۴	۰/۴۰۸۳۹۱۲۴۴
۱	۰/۲۲۹۵۰۸	۰/۳۷۹۹۶۶۶۲۹
۱/۱	۰/۱۹۵۸۷۸	۰/۳۵۴۴۰۹۴۹۰
۱/۲	۰/۱۶۶۸۴۷	۰/۳۳۱۳۴۶۷۷۴
۱/۳	۰/۱۴۱۸۳۷	۰/۳۱۰۴۶۴۱۰۲
۱/۴	۰/۱۲۰۳۶۲	۰/۲۹۱۴۹۵۱۲۶
۱/۵	۰/۱۰۲۰۲۵	۰/۲۷۴۲۱۲۹۶۲
۲	۰/۰۴۳۹۵۱	۰/۲۰۷۱۶۹۷۷۴
۲/۵	۰/۰۱۸۵۴۶	۰/۱۶۲۰۱۴۵۴۴
۳	۰/۰۰۷۶۱۰	۰/۱۳۰۱۶۱۲۲۲
۳/۵	۰/۰۰۲۹۵۳	۰/۱۰۶۸۵۵۳۹۲
۴	۰/۰۰۰۹۶۲	۰/۰۸۹۲۹۱۵۱۵
۴/۵	۰/۰۰۰۱۲۳	۰/۰۷۵۷۲۷۳۳۷

جدول ۱۲.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{3}{4}$ با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته

x	رانگ-گوته [۸۷]	هرمیت تغییریافته
۰	۰/۸۵۲۱۹۳	۰/۸۵۲۱۰۰۰۰۰
۰/۱	۰/۷۵۵۳۷۷	۰/۷۶۰۲۶۰۳۳۱
۰/۲	۰/۶۶۵۴۴۸	۰/۶۸۲۵۰۶۱۴۴
۰/۳	۰/۵۸۲۹۸۵	۰/۶۱۶۰۹۷۶۷۷
۰/۴	۰/۵۰۸۱۴۱	۰/۵۵۸۹۳۰۳۰۱
۰/۵	۰/۴۴۰۸۴۹	۰/۵۰۹۳۶۵۶۹۳
۰/۶	۰/۳۸۰۹۰۷	۰/۴۶۶۱۱۳۱۳۶
۰/۷	۰/۳۲۷۹۷۳	۰/۴۲۸۱۴۴۶۳۰
۰/۸	۰/۲۸۱۵۳۶	۰/۳۹۴۶۳۳۲۴۲
۰/۹	۰/۲۴۱۰۱۳	۰/۳۶۴۹۰۷۶۹۲
۱	۰/۲۰۵۸۳۲	۰/۳۳۸۴۱۸۵۰۵
۱/۱	۰/۱۷۵۴۳۴	۰/۳۱۴۷۱۲۳۰۰
۱/۲	۰/۱۴۹۲۷۵	۰/۲۹۳۴۱۲۵۲۳
۱/۳	۰/۱۲۶۸۲۱	۰/۲۷۴۲۰۴۱۳۷
۱/۴	۰/۱۰۷۵۹۶	۰/۲۵۶۸۲۲۰۴۴
۱/۵	۰/۰۹۱۱۹۶	۰/۲۴۱۰۴۱۸۵۲
۲	۰/۰۳۹۲۲۳	۰/۱۸۰۳۶۱۰۸۲
۲/۵	۰/۰۱۶۵۷۴	۰/۱۴۰۰۱۱۹۰۱
۳	۰/۰۰۶۸۳۲	۰/۱۱۱۸۳۰۴۶۵
۳/۵	۰/۰۰۲۶۶۸	۰/۰۹۱۳۷۴۲۳۰
۴	۰/۰۰۰۹۱۳	۰/۰۷۶۰۵۷۵۲۷
۴/۵	۰/۰۰۰۲۳۷	۰/۰۶۴۲۹۲۴۷۰



شکل ۹.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ با استفاده از توابع هرمیت تغییریافته به ازای $\lambda = ۱, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, ۰$.

۳.۴.۵ حل مسئله‌ی انتقال گرما در یک سیال دارسین با توابع سینک

در این مسئله از تغییر متغییر $\phi(x) = ln(x)$ استفاده کرده‌ایم. باید توجه کرد به‌دلیل این‌که شرایط مرزی مسئله برقرار شوند تابع زیر را می‌سازیم:

$$p(x) = \frac{\beta^۲ x}{۲(\beta + x)}, \qquad (۸۰.۵)$$

که β ثابتی است که باید تعیین شود. در نتیجه $f(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$f(x) \simeq f_N(x) = u_N(x) + p(x), \qquad (۸۱.۵)$$

که در آن

$$u_n(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \frac{x^۳ S_k(x)}{x^۳ + ۱}. \qquad (۸۲.۵)$$

حال برای یافتن ضرایب مجهول c_kها، معادله‌ی (۸۱.۵) را در معادله‌ی (۶۹.۵) جایگذاری می‌کنیم و در نقاط هم‌مکانی زیر

$$x_j = e^{jh}, \quad j = -N, ..., N \qquad (۸۳.۵)$$

آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. حال با توجه به معادلات (۲۲.۴) تا (۲۵.۴) و نیز معادله‌ی (۸۲.۵) داریم:

$$u_N(x_j) = \frac{c_j x_j^{3}}{x_j^{3}+1}, \tag{۸۴.۵}$$

$$\begin{aligned} u'_{\delta}{}^{(0)}N(x_j) &= \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k\big\{\big(\frac{3x_j^{3}}{1+x_j^{3}} - \frac{3x_j^{5}}{(1+x_j^{3})^{2}}\big)\delta_{k,j}^{(0)} \\ &\quad + \big(\frac{x_j^{3}\phi'(x_j)}{1+x_j^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(1)}\big\}, \end{aligned} \tag{۸۵.۵}$$

$$\begin{aligned} u''_N(x_j) &= \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k\big\{\big(\frac{6x_j}{1+x_j^{3}} - \frac{24x_j^{4}}{(1+x_j^{3})^{2}} + \frac{18x_j^{7}}{(1+x_j^{3})^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(0)} \\ &\quad + \big(\frac{6x_j^{2}\phi'(x_j)}{1+x_j^{3}} - \frac{6x_j^{5}\phi'(x_j)}{(1+x_j^{3})^{2}} + \frac{x_j^{3}\phi''(x_j)}{1+x_j^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(1)} \\ &\quad + \big(\frac{x_j^{3}(\phi'(x_j))^{2}}{1+x_j^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(2)}\big\}, \end{aligned} \tag{۸۶.۵}$$

$$\begin{aligned} u'''_N(x_j) = \textstyle\sum_{k=-N}^{N} c_k\big\{&\big(\frac{6}{1+x_j^{3}} - \frac{114x_j^{3}}{(1+x_j^{3})^{2}} + \frac{270x_j^{6}}{(1+x_j^{3})^{3}} - \frac{169x_j^{9}}{(1+x_j^{3})^{4}}\big)\delta_{k,j}^{(0)} \\ +\big(\frac{18x_j\phi'(x_j)}{1+x_j^{3}} - \frac{72x_j^{4}\phi'(x_j)}{(1+x_j^{3})^{2}} &+ \frac{54x_j^{7}\phi'(x_j)}{(1+x_j^{3})^{3}} + \frac{9x_j^{2}\phi''(x_j)}{1+x_j^{3}} - \frac{9x_j^{5}\phi''(x_j)}{(1+x_j^{3})^{2}} + \frac{x_j^{3}\phi'''(x_j)}{1+x_j^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(1)} \\ +\big(\frac{6x_j^{2}\phi'(x_j)}{1+x_j^{3}} - \frac{6x_j^{5}\phi'(x_j)}{(1+x_j^{3})^{2}} &+ \frac{3x_j^{3}\phi''(x_j)\phi'(x_j)}{1+x_j^{3}} + \frac{3x_j^{2}(\phi'(x_j))^{2}}{1+x_j^{3}} - \frac{3x_j^{5}(\phi'(x_j))^{2}}{(1+x_j^{3})^{2}}\big)\delta_{k,j}^{(2)} \\ &+\big(\frac{x_j^{3}(\phi'(x_j))^{3}}{1+x_j^{3}}\big)\delta_{k,j}^{(3)}\big\}. \end{aligned} \tag{۸۷.۵}$$

با جایگذاری معادلات (۸۴.۵) تا (۸۷.۵) در معادله‌ی (۶۹.۵) خواهیم داشت:

$$f'''_N(x_j) + (\tfrac{\lambda+5}{2})(f_N(x_j))(f''_N)(x_j) - (\tfrac{2\lambda+1}{3})(f'_N(x_j))^{2}, \quad j=-N,...,N. \tag{۸۸.۵}$$

معادله‌ی (۸۸.۵) تشکیل یک دستگاه $2N+1$ معادله می‌دهد که با حل آن‌ها به روش نیوتن می‌توانیم ضرایب c_k را پیدا کنیم.

در جدول (۱۳.۵) نتایج به‌دست آمده از توابع سینک، برای $f'(0)$ به ازای مقادیر مختلف λ با مقادیر به‌دست آمده از رانگ-گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. در جداول (۱۴.۵) و (۱۵.۵) مقادیر به‌دست آمده از توابع ،sdk؛ برای $f'(x)$ به ازای مقادیر $\lambda = \frac{1}{4}, \lambda = \frac{3}{4}$ در نقاط مختلف x با مقادیر به‌دست آمده از رانگ-گوته [۸۷] مقایسه کرده‌ایم. همچنین نموداری از نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازاس مقادیر مختلف λ در شکل (۳.۴.۵) ارائه شده است.

جدول ۱۳.۵: جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از توابع سینک در $N = $ ۳۰ در مقایسه با رانگ- گوته.

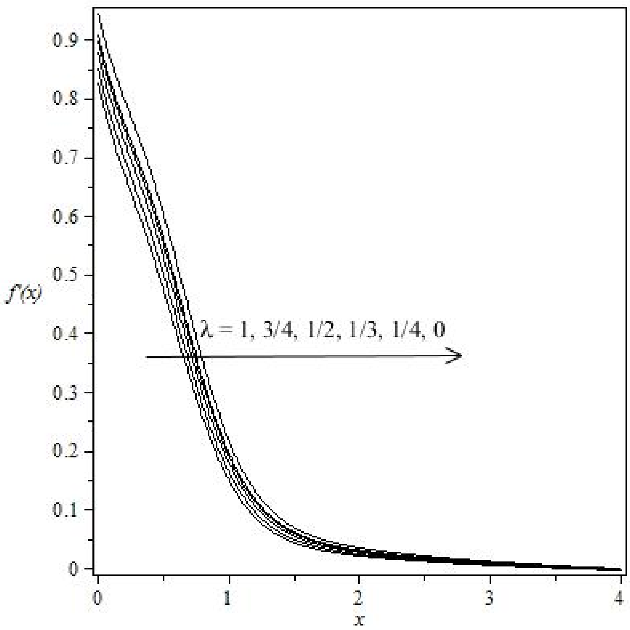
λ	رانگ- گوته [۸۷]	سینک	h	β
۰	۰٫۹۴۷۶۰	۰٫۹۴۷۴۹۹۹۰	۵	۱٫۸۹۵
$\frac{1}{4}$	۰٫۹۱۱۳۰	۰٫۹۱۰۰۰۰۰	۵	۱٫۷۸۷
$\frac{1}{3}$	۰٫۹۰۰۳۰	۰٫۹۰۰۳۰۹۸	۵	۱٫۸۰۰۶۲
$\frac{1}{2}$	۰٫۸۷۹۸۰	۰٫۸۷۹۸۵۹۹	۵	۱٫۷۵۹۷۲
$\frac{3}{4}$	۰٫۸۵۲۲۰	۰٫۸۵۲۲۴۹۹	۵	۱٫۷۰۴۵
۰	۰٫۸۲۷۶۰	۰٫۸۲۷۶۰۹۹	۵	۱٫۶۵۵۲۲

جدول ۱۴.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{1}{4}$ با استفاده از توابع سینک

x	رانگ- گوته [۸۷]	سینک
۰	۰٫۹۱۱۲۹۵	۰٫۹۱۰۰۰۰۰
۰٫۱	۰٫۸۱۳۶۰۴	۰٫۸۲۴۹۴۹۵
۰٫۲	۰٫۷۲۱۳۵۱	۰٫۷۵۹۳۳۹۹
۰٫۳	۰٫۶۳۵۵۳۱	۰٫۶۹۹۴۳۹۰
۰٫۴	۰٫۵۵۶۶۶۱	۰٫۶۳۵۷۴۸۱
۰٫۵	۰٫۴۸۴۹۹۷	۰٫۵۶۳۵۶۶۸
۰٫۶	۰٫۴۲۰۵۸۷	۰٫۴۸۳۶۳۵۳
۰٫۷	۰٫۳۶۳۲۷۶	۰٫۴۰۱۰۴۳۷
۰٫۸	۰٫۳۱۲۶۷۷	۰٫۳۲۲۴۷۳۱
۰٫۹	۰٫۲۶۸۲۶۴	۰٫۲۵۳۳۶۵۳
۱	۰٫۲۲۹۵۰۸	۰٫۱۹۶۴۷۵۶
۱٫۱	۰٫۱۹۵۸۷۸	۰٫۱۵۱۹۸۶۹
۱٫۲	۰٫۱۶۶۸۴۷	۰٫۱۱۸۴۳۹۱
۱٫۳	۰٫۱۴۱۸۳۷	۰٫۰۹۳۷۰۶۲
۱٫۴	۰٫۱۲۰۳۶۲	۰٫۰۷۵۶۵۶۳
۱٫۵	۰٫۱۰۲۰۲۵	۰٫۰۶۲۴۷۱۴
۲	۰٫۰۴۳۹۵۱	۰٫۰۳۱۵۳۸۷
۲٫۵	۰٫۰۱۸۵۴۶	۰٫۰۱۸۹۹۲۸
۳	۰٫۰۰۷۶۱۰	۰٫۰۱۰۶۱۳۵
۳٫۵	۰٫۰۰۲۹۵۳	۰٫۰۰۴۲۶۲۸
۴	۰٫۰۰۰۹۶۲	−۰٫۰۰۰۶۰۶۹
۴٫۵	۰٫۰۰۰۱۲۳	−۰٫۰۰۴۳۲۰۵

جدول ۱۵.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ به ازای $\lambda = \frac{۳}{۴}$ با استفاده از توابع سینک

x	رانگ- گوته [۸۷]	سینک
۰	۰/۸۵۲۱۹۳	۰/۸۵۲۲۴۹۹
۰/۱	۰/۷۵۵۳۷۷	۰/۷۶۶۳۴۳۰
۰/۲	۰/۶۶۵۴۴۸	۰/۶۹۸۶۷۸۱
۰/۳	۰/۵۸۲۹۸۵	۰/۶۳۶۷۴۵۷
۰/۴	۰/۵۰۸۱۴۱	۰/۵۷۲۱۹۹۸
۰/۵	۰/۴۴۰۸۴۹	۰/۵۰۱۲۲۲۴
۰/۶	۰/۳۸۰۹۰۷	۰/۴۲۴۸۸۱۵
۰/۷	۰/۳۲۷۹۷۳	۰/۳۴۷۹۲۸۹
۰/۸	۰/۲۸۱۵۳۶	۰/۲۷۶۲۲۷۸
۰/۹	۰/۲۴۱۰۱۳	۰/۲۱۴۲۸۵۳
۱	۰/۲۰۵۸۳۲	۰/۱۶۴۱۱۲۹
۱/۱	۰/۱۷۵۴۳۴	۰/۱۲۵۴۶۵۶
۱/۲	۰/۱۴۹۲۷۵	۰/۰۹۶۷۴۰۶
۱/۳	۰/۱۲۶۸۲۱	۰/۰۷۵۸۵۵۹
۱/۴	۰/۱۰۷۵۹۶	۰/۰۶۰۸۱۵۰
۱/۵	۰/۰۹۱۱۹۶	۰/۰۴۹۹۶۱۲
۲	۰/۰۳۹۲۲۳	۰/۰۲۴۹۵۰۲
۲/۵	۰/۰۱۶۵۷۴	۰/۰۱۴۶۷۲۱
۳	۰/۰۰۶۸۳۲	۰/۰۰۷۶۱۴۳
۳/۵	۰/۰۰۲۶۶۸	۰/۰۰۲۲۱۷۷
۴	۰/۰۰۰۹۱۳	−۰/۰۰۱۹۱۳۲
۴/۵	۰/۰۰۰۲۳۷	−۰/۰۰۵۰۴۳۱



شکل ۱۰.۵: نتایج به‌دست آمده برای $f'(x)$ با استفاده از توابع سینک به ازای $\lambda = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱$.

فصل ۶

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه حل چندبن معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی در بازه‌ی نیمه‌متناهی با استفاده از توابع لاگر، هرمیت و سینک مورد بررسی قرار گرفت. همان طور که می‌دانیم چندجمله‌ای‌های لاگر و هرمیت در بازه‌ی متناهی دارای کارایی بالا و همگرایی طیفی می‌باشند اما در بازه‌ی نیمه‌متناهی به دلیل میل به بی‌نهایت این چندجمله‌ای‌ها و رفتار غیر چندجمله‌ای بعضی سیستم‌های دینامیکی از توابع لاگر و هرمیت استفاده می‌کنیم. همچنین همان‌گونه که می‌دانید توابع سینک در بازه نیمه متناهی دارای قدرت همگرایی بالایی می‌باشد.

نتایج حاصل از کاربرد روش‌های معرفی شده در حل مسایل نشان دهنده‌ی این موضوع می‌باشد که نرخ همگرایی توابع لاگر، هرمیت و سینک در مسائل گوناگون متفاوت است. یعنی ممکن است در یک مسئله توابع لاگر بهترین جواب را داشته باشند، در یک مسئله توابع هرمیت بهترین جواب را داشته باشند و در یک مسئله توابع سینک بهترین جواب را داشته باشند. اما آنچه که مسلم است نحوه‌ی پیاده‌سازی توابع لاگر و هرمیت از توابع سینک ساده‌تر است.

در پایان باید یادآور شد که تاکنون هیچ روشی که برای حل همه مسائل مناسب باشد، یافت نشده است. عواملی هم‌چون رفتار تابع در بی‌نهایت، سرعت نزول تابع، مجانب شدن تابع به تابعی معین و نوسان‌های تابع در انتخاب روش موثر می‌باشد.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انتگرالگیری گاوس-رادو	Gauss-Radau integration
انتگرالگیری گاوس-لوباتو	Gauss-Lobatto integration
تابع باقیمانده	Residual function
تابع دلتای کرونکر	Kronecker delta function
تابع گاما	Gamma function
تابع مولد	Generating function
تنش برشی	Shearing stress
توابع آزمون	Test functions
توابع پایه	Basis functions
توابع تقریب	Approximting functions
توابع سعی	Trial functions
توابع سینک	Sinc functions
توابع کامل	Complete functions
توابع گویای چبیشف	Rational Chebyshev functions
توابع گویای لژاندر	Rational Legendre functions
توابع لاگر	Laguerre functions
توابع متعامد	Orthogonal functions
توابع وزن	Weight functions
چندجمله‌ای‌های چبیشف	Chebyshev polynomials
چندجمله‌ای‌های ژاکوبی	Jacobi polynomials
چندجمله‌ای‌های لاگر	Laguerre polynomials
چندجمله‌ای‌های لاگرانژ	Lagrange polynomials
چندجمله‌ای‌های لژاندر	Legendre polynomials
چندجمله‌ای‌های هرمیت	Hermite polynomials

درونیابی لاگرانژ	Lagrange interpolation
روش باقیمانده‌های وزنی	Method of weighted residuals
روش برش دامنه	Domain truncation method
روش پرتابی	Shooting method
روش تاو	Tau method
روش تبدیل تفاضلی	Differential transformation method
روش تفاضلات متناهی	Finite difference method
روش تکراری پارامتر	Parameter iteration method
روش تکراری تغییرات	Variational iteration method
روش درونی	Interior method
روش زیردامنه	Subdomain method
روش شبه خطی‌سازی	Quasilinearization method
روش شبه خطی‌سازیبریسنتریک	Barycentric-quasilinearization method
روش طیفی	Spectral method
روش عناصر محدود	Finite element method
روش کمترین مربعات	Least squares method
روش گالرکین	Galerkin method
روش گشتاورها	Method of moments
روش مرزی	Boundary method
روش مرزی	Boundary method
روش نقاط انتخابی	Method of selected points
روش هم‌مکانی	Collocation method
روش‌های درونیاب	Interpolating methods
روش‌های شبه‌طیفی	Pseudospectral methods
روش‌های غیردرونیاب	Non-interpolating methods
فرمول‌های انتگرالگیری گاوسی	Gaussian integration formulas
قضیه وایراشتراس	Weierstrass theorem
گره‌های هم‌مکانی	Collocation points
معادلات اشتورم-لیوویل	Sturm-Liouville equations
نرم-بینهایت	Norm-infinity
وزن‌های مربع‌سازی	Quadrature weights
همگرایی یکنواخت	Uniform convrgence

هم‌مکانی متعامد	Orthogonal collocation

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Approximting functions	توابع تقریب
Chebyshev polynomials	چندجمله‌ای‌های چبیشف
Collocation method	روش هم‌مکانی
Collocation points	گره‌های هم‌مکانی
Complete functions	توابع کامل
Differential transformation method	روش تبدیل تفاضلی
Dirac delta	تابع دلتای دیراک
Domain truncation method	روش برش دامنه
Error distribution principles	اصول توزیع خطا
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Finite element method	روش عناصر محدود
Galerkin method	روش گالرکین
Gamma function	تابع گاما
Gauss-Lobatto integration	انتگرالگیری گاوس-لوباتو
Gauss-Radau integration	انتگرالگیری گاوس-رادو
Gaussian integration formulas	فرمول‌های انتگرالگیری گاوسی
Generating function	تابع مولد
Hermite polynomials	چندجمله‌ای‌های هرمیت
Interior method	روش درونی
Interpolating methods	روش‌های درونیاب
Jacobi polynomials	چندجمله‌ای‌های ژاکوبی
Kronecker delta function	تابع دلتای کرونکر
Lagrange interpolation	درونیابی لاگرانژ
Lagrange polynomials	چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

Laguerre functions	توابع لاگر
Laguerre polynomials	چندجمله‌ای‌های لاگر
Least squares method	روش کمترین مربعات
Legendre polynomials	چندجمله‌ای‌های لژاندر
Linearization method	روش خطی‌سازی
Method of moments	روش گشتاورها
Method of selected points	روش نقاط انتخابی
Method of weighted residuals	روش باقیمانده‌های وزنی
Non-interpolating methods	روش‌های غیردرونیاب
Norm-infinity	نرم-بینهایت
Orthogonal collocation	هم‌مکانی متعامد
Orthogonal functions	توابع متعامد
Parameter iteration method	روش تکراری پارامتر
Piecewise decomposition method	روش تجزیه تکه‌ای
Pseudospectral methods	روش‌های شبه‌طیفی
Quasilinearization method	روش شبه خطی‌سازی
Rational Chebyshev functions	توابع گویای چبیشف
Rational Legendre functions	توابع گویای لژاندر
Residual function	تابع باقیمانده
Root mean square	جذر متوسط مربع
Sinc functions	توابع سینک
Shooting method	روش پرتابی
Spectral methods	روش طیفی
Sturm-Liouville equations	معادلات اشتورم-لیوویل
Subdomain method	روش زیردامنه
Tau method	روش تاو
Test functions	توابع آزمون
Trial functions	توابع سعی
Ultraspherical polynomials	چندجمله‌ای‌های فوق کروی
Uniform convrgence	همگرایی یکنواخت
Variational iteration method	روش تکراری تغییرات
Weierstrass theorem	قضیه وایراشتراس

Weight functions	توابع وزن

مراجع

[1] D. Gottlieb, M. Y. Hussaini, S. Orszag, *"Theory and Applications of Spectral Methods, In Spectral Methods for Partial Differential Equations edited by R. Voigt, D. Gottlieb, M.Y. Hussaini"*, SIAM, Philadelphia, 1984. 1

[2] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *"Spectral Methods in Fluid Dynamic"*, Springer-Verlag, New York, 1987. 1, 6, 8

[3] B. Y. Guo, *"Spectral Methods and Their Applications"*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998. 1

[4] S. H. Crandall, *"Engineering Analysis"*, McGraw-Hill, New York, 1956. 2

[5] L. Collatz, *"The Numerical Treatment of Differential Equations"*, Springer-Verlag, Berlin, 1960. 2, 6

[6] B. A. Finlayson, L. E. Scriven, *"The method of weighted residuals — a review"*, Appl. Mech. Rev. 19 (1966) 735–748. 2, 6

[7] R. Vichnevetsky, *"Use of functional approximation methods in the computer solution of initial value partial differential equation problems"*, IEEE Trans. comp. C-18 (1969) 499–512. 2

[8] B. A. Finlayson, *"The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer"*, Academic Press Inc., New York, 1972. 2, 6

[9] C. B. Biezeno, J. J. Koch, *"Over een nieuwe methode ter berekening van vlokke platen met toepassing op enkele voor de techniek belangrikje belastingsgevallen"*, Ing. Grav. 38 (1923) 25–36. 4

[10] C. B. Biezeno, *"Over een vereenvoudiging en over een uitbreiding van de methode van ritz"*, Christiaan Huygens. 3 (1923) 69–75. 4

[11] C. B. Biezeno, R. Grammel, *"Engineering Dynamics, Vol. 1"*, Blackie and Son Ltd., London, 1955. 4

[12] J. C. Slater, *"Electronic energy bands in metals"*, Phys. Rev. 45 (1934) 794–801. 4, 6

[13] R. A. Frazer, W. P. Jones, S. W. Skan, *"Approximations to functions and to the solutions of differential equations"*, ARC R&M, 1799, 1937. 4, 6

[14] C. Lanczos, *"Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions"*, J. Math. Phys. 17 (1938) 123–199. 4

[15] J. V. Villadsen, W. E. Stewart, *"Solution of boundary value problems by orthogonal collocation"* , Chem. Eng. Sci. 22 (1967) 1483–1501. 4

[16] H. Yamada, *"An approximate method of integration of laminar boundary layer equation"*, Appl. Mech. Rev. 3 (1950). 5

[17] A. A. Dorodnitsyn, *"Advances in Aeronautical Sciences, Vol. 3"*, Pergamon, New York, 1960. 5

[18] W. J. Duncan, *"Galerkin's method in mechanics and differential equations"*, ARC R&M, 1798 (1937) 484–516. 6

[19] W. J. Duncan, *"Application of the Galerkin method to the torsion flexure of cylinders and prisms"*, Phill. Mag. 25 (1938) 636–649. 6

[20] W. F. Ames, *"Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol. 2"*, Academic Press Inc., New York, 1972. 6

[21] C. A. J. Fletcher, *"Computational Galerkin Methods"*, Springer-Verlag, New York, 1984. 6

[22] K. Parand, M. Dehghan, A. R. Rezaei, S. M. Ghaderi, *"An approximational algorithm for the solution of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method"*, Comput. Phys. Commun. 181 (2010) 1096–1108. 6

[23] K. Parand, M. Shahini, M. Dehghan, *"Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear differential equations of Lane-Emden type"*, J. Comput. Phys. 228 (2009) 8830–8840. 6

[24] B. Y. Guo, *"Gegenbauer approximation and its applications to differential equations on the whole line"*, J. Math. Anal. Appl. 226 (1998) 180–206. 6

[25] B. Y. Guo, *"Gegenbauer approximation and its applications to differential equations with rough asymptotic behaviors at infinity"*, Appl. Numer. Math. 38 (2001) 403-–425. 6

[26] T. Tajvidi, M. Razzaghi, M. Dehghan, *"Modified rational Legendre approach to laminar viscous flow over a semi-infinite flat plate"*, Chaos Soliton. Frac. 35 (2008) 59–66. 8

[27] M. Dehghan, A. Saadatmandi, *"A tau method for the one-dimensional parabolic inverse problem subject to temperature overspecification"*, Comput. Math. Appl. 52 (2006) 933–940. 8

[28] K. Parand, M. Dehghan, A. Taghavi, *"Modified generalized Laguerre function tau method for solving laminar viscous flow: The Blasius equation"*, Int. J. Numer. Method. H. 20 (2010) 728–743. 8, 9

[29] K. Parand, M. Razzaghi, *"Rational Chebyshev tau method for solving higher-order ordinary differential equations"*, Int. J. Comput. Math. 81 (2004) 73–80. 8, 9

[30] B. Fornberg, *"A Practical Guide to Pseudospectarl Methods"*, Cambridge University Press, New York, 1996. 9

[31] J. P. Boyd, *"Chebyshev and Fourier Spectral Methods, second edition"*, Dover, New York, 2000. 9, 10

[32] Y. Maday, B. Pernaud-Thomas, Vandeven H, *“Reappraisal of Laguerre type spectral methods”*, La Recherche Aerospatiale. 6 (1985) 13–35. 9

[33] D. Funaro, *“Computational aspects of pseudospectral Laguerre approximations”*, Appl. Numer. Math. 6 (1990) 447–457. 9

[34] J. Shen, *“Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using Laguerre functions”* SIAM J. Numer. Anal. 38 (2000) 1113–1133. 9

[35] B. Y. Guo, J. Shen, *“Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval”*, Numer. Math. 86 (2000) 635–654. 9

[36] H. I. Siyyam, *“Laguerre tau methods for solving higher order ordinary differential equations”*, J. Comput. Anal. Appl. 3 (2001) 173–182. 9

[37] B. Y. Guo, *“Jacobi spectral approximation and its applications to differential equations on the half line”*, J. Comput. Math. 18 (2000) 95–112. 9

[38] B. Y. Guo, *“Jacobi approximations in certain Hilbert spaces and their applications to singular differential equations”*, J. Math. Anal. Appl. 243 (2000) 373–408. 9

[39] J. P. Boyd, *“Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval”*, J. Comput. Phys. 70 (1987) 63–88. 9

[40] B. Y. Guo, J. Shen, Z. Q. Wang, *“A rational approximation and its applications to differential equations on the half line”*, J. Sci. Comput. 15 (2000) 117–147. 9

[41] K. Parand, M. Razzaghi, *“Rational Chebyshev tau method for solving Volterra’s population model”*, Appl. Math. Comput. 149 (2004) 893–900. 9

[42] K. Parand, M. Razzaghi, *“Rational Legendre approximation for solving some physical problems on semi-infinite intervals”*, Phys. Scr. 69 (2004) 353–357. 9

[43] J. P. Boyd, *“The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain”*, J. Comput. Phys. 45 (1982) 43–79. 10, 11, 14

[44] F. Baharifard, *“An introduction to Gegenbauer polynomials, rational and exponential Gegenbauer functions with their applications”.*

[45] S. S. Bayin, *“Mathemathical Methods in science And Engineering”*, Springer-Verlag, (2006). 11

[46] O. Coulaud, D. Funaro, O. Kavian, *“Computational aspects of pseudospectral Laguerre approximations”*, Appl. Numerical. Math. 6 (1990) 451–458. 13

[47] B. Y. Guo, J. Shen, C. L. Xu, J. Comp. Math. 53 65, (2005). 13

[48] R. Zhang, Z. Q. Wang, B. Y. Guo, *“A new perturbative approach to nonlinear problems”*, J. Sci. Comput. 10 759, (2008). 13

[49] H. Taseli, Int. J .Quantom .Chem. 63 949, (1996). 13

[50] I. Z. Khabibrakhmanov, D. Summers, *“The use of generalized Laguerre polynomials in spectral methods for nonlinear differential equations”*, Computers Math. Applic. 36 (1998) 65–70. 14

[51] S. H. Dong, *"Realization of the Dynamical Group for the Generalized Laguerre Functions"*, Applied Mathematics and Computation 11 (2004) 1035–1039. 14

[52] J. P. Boyd, C. Rangan, P. H. Bucksbaum, *"Pseudospectral methods on a semi-infinite interval with application to the hydrogen atom: a comparison of the mapped Fourier-sine method with Laguerre series and rational Chebyshev expansions"*, J. Comput. Phys. 188 (2003) 56–74. 14

[53] J. P. Boyd, *"Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval"*, J. Comput. Phys. 70 (1987) 63–88. 14

[54] J. P. Boyd, *"Chebyshev and Fourier Spectral Methods, second ed"*, Dover, New York, (2000). 14

[55] V. Iranzo, A. Falques, Comput. Method Appl. M. 105, (1992). 14

[56] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, *"Spectral Methods in Fluid Dynamic"*, Springer-Verlag, New York, (1987). 14

[57] A. Taghavi, *"Solving differntial equation in semi-infinite interval with spectral method based on Modified generalized Laguerre function"*. 17

[58] B. Y. Guo, J. Shen, *"Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval"*, Numerische Mathematik 86 (2000) 11–19. 18

[59] H. I. Siyyam, *"Laguerre tau methods for solving higher order ordinary differential equations"*, J. Comput. Anal. Appl. 3 (2001) 173–182. 18

18

[60] J. Shen, T. Tang, *"High Order Numerical Methods and Algorithms"*, Chinese Science Press, (2005).

[61] J. Shen, L. L. Wang, *"Some Recent Advances on Spectral Methods for Unbounded Domains"*, Commun. Comput. phys. 5 (2009) 195–241. 23

[62] S. M. Ghaderi, *"Solving Differential equations by using Hermit Orthogonal polynomials and Hermit Orthogonal functions via Spectral methods"*. 23

[63] M. Dehghan, A. Saadatmandi, *"The numerical solution of a nonlinear system of second-order boundary value problems using the Sinc-Collocation method"*, Math. Comput. Model. 46(2007)1434–1441. 27

[64] J. Lund, K. Bowersi, *"Sinc methods for Quadrature and Differential equations"*, SIAM, Philadelphia (1992). 28

[65] M. El-Gamel, S. H. Behiry and H. Hashish, *"Numerical method for the solution of special nonlinear fourth-order boundary value problems"*, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 717–734. 33, 34

[66] A. Pirkhedri, *"Solving Diffential equations in semi-infinite interval with Sinc functions"*. 33

[67] F. Ahmad, *"A simple analytical solution for the steady flow of a third grade fluid in a porous half space"*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. 14 (2009) 2848–2852. 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47

[68] T. Hayat, F. Shahzad, M. Ayub, *"Analytical solution for the steady flow of the third grade fluid in a porous half space"*, Appl. Math. Modelling 2007, 31 (2007) 2424–2432. 41, 43, 46

[69] K. Parand, F. Bayat babplghani, *"Applying the modified generalized laguerre functions for solving steady slow of a third grade fluid in a porous half space"*, World Applied Sciences Journal . 17 (2012) 467–472. 41, 42

[70] H. T. Davis., *"Introduction to Nonlinear Differential and Integral equations"*, New York, Dover (1962). 48

[71] S. Chandrasekhar, *"Introduction to the study of Stellar Structure"*, New York, Dover (1967). 48

[72] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinsky, L. M. Simmons, *"A new perturbative approach to nonlinear problems"*, J. Math. Phys. 30 (1989) 1447–1455. 48

[73] V. B. Mandelzweig, F. Tabakin, *"Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear ODEs"*, Comput. Phys. Commun. 141 (2001) 268–281. 48

[74] C. M. Bender, K. A. Milton, S. S. Pinsky, L. M. Jr. Simmons, *"A new perturbative approach to nonlinear problems"*, J. Math. Phys. 30 (1989) 1447–1455. 49

[75] J. B. Laurenzi, J. Math. Phys. 31 (1990). 49

[76] A. Cedillo, J. Math. Phys. 34 (1993). 49

[77] C. M. Bender, S. A. Orzag, *"Advanced Mathematical Method For Scientists And Engineers"*, Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[78] G. Adomian, *"Solution of the Thomas-Fermi equatio"*, Appl. Math. Lett. 11 (1998) 11–19. 49

[79] S. Liao, *"An explicit analytic solution to the Thomas-Fermi equation"*, Int. J. Nonlinear. Mech. 34 (1999) 759–778. 49

[80] S. Liao, *"An explicit, totally analytic solution of Laminar viscous flow over a semi-infinite flat plate"*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 3 (1998) 53–57. , , 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55

[81] H. Khan, H. Xu, Phys. Lett. A 365 (2007). 49

[82] S. Kobayashi, T. Matsukuma, S. Nagi, K. Umeda, J. Phys. Soc. Jpn. 10 (1955) 1447–1455. 49, 50, 51, 52, 54

[83] A. R. Sohouli, D. Domairry, M. Famouri, A. Mohsenzadeh, *"Analytical solution of natural convection of Darcian fluid about a vertical full cone embedded in porous media prescribed wall temperature by means of HAM"*, Int. Commun. Heat Mass Transf. 35 (2008) 1380–1384 . 55, 56

[84] D. A. Nield, A. Bejan, *"Convection in Porous Media"*, Springer-Verlag, NewnYork (2006). 55, 56

[85] P. Cheng, T. T. Le, I. Pop, *"Natural convection of a Darcian fluid about a cone"*, Int. Commun. Heat Mass Transf. 212 (1985)705–717. 56

[86] K. Parand, F. Baharifard, F. Bayat Babolghani, *"Comparison between Rational Gegenbauer and Modified Generalized Laguerre functions Collocation methods for solving the case of heat transfer equations arising in porous medium"*, Int. J. Industrial Mathematics. 4 (2012) 107–122. 58, 59, 60

[87] AR. Sohouli, M. Famouri, A. Kimiaeifar, G. Domairry, *"Application of homotopy analysis method for natural convection of Darcian fluid about a vertical full cone embedded in pours media prescribed surface heat flux"*, Int. Commun. Heat Mass Transf. 15 (2010) 1691–1699. 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67